МАТЕМАТИКА 2

Други писмени колоквијум, 2.6.2016

Група 4

Решења задатака

Драган Ђорић

Задаци и решења

1. Израчунати $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x-1}+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}$.

Решење: Сменом $x-1=t^6$ имамо да је

$$dx = 6t^5dt, \quad \sqrt[6]{x-1}=t, \quad \sqrt[3]{x-1}=t^2, \quad \sqrt{x-1}=t^3,$$

а за дати интеграл I важи $I = 6\displaystyle\int \frac{t^4dt}{1+t+t^2} = 6J$.

Интеграл J је интеграл рационалне функције. Како је

$$\frac{t^4}{1+t+t^2} = \frac{t^4+t^3+t^2-t^3-t^2}{1+t+t^2} = t^2 - \frac{t^3+t^2}{1+t+t^2} = t^2 - t + \frac{t}{1+t+t^2},$$

то је

$$J = \int t^2dt - \int tdt + \int \frac{tdt}{1+t+t^2} = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + K.$$

Интеграл K се своди на $\displaystyle\int \frac{du}{u}$ и $\displaystyle\int \frac{du}{u^2+a^2}$,

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1} - \frac{1}{2}\int \frac{d(t+1/2)}{(t+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2} \\ &= \frac{1}{2}\ln(1+t+t^2) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Према томе,

$$\begin{aligned} I &= 6J \\ &= 2t^3 - 3t^2 + 3\ln(1+t+t^2) - 2\sqrt{3}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C \\ &= 2\sqrt{x-1} - 3\sqrt[3]{x-1} + 3\ln(1+\sqrt[6]{x-1}+\sqrt[3]{x-1}) - 2\sqrt{3}\arctan\frac{2\sqrt[6]{x-1}+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

---

2. Израчунати дужину лука криве дате у параметарском облику

$$x = t\sqrt{4-t^2}, \quad y(t) = 4\sqrt{2}\sqrt{4-t^2}, \quad 0 \le t \le \sqrt{2}.$$

Решење: Како је

$$x'(t) = \sqrt{4-t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{4-2t^2}{\sqrt{4-t^2}}, \quad y'(t) = -\frac{4\sqrt{2}t}{\sqrt{4-t^2}},$$

то је

$$x'^2(t) + y'^2(t) = \frac{1}{4-t^2}(16-16t^2+4t^4+32t^2) = \frac{(4+2t^2)^2}{4-t^2}.$$

Према формули за дужину лука имамо да

$$l = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt = 2\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2+t^2}{\sqrt{4-t^2}}\,dx = 2L.$$

Ако у интегралу L уведемо смену $t = 2\sin u$, добијамо да је

$$L = \int_0^{\pi/4} (2 + 4\sin^2 u)du = 2\int_0^{\pi/4} du + 4\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos 2u}{2} du = 4u - \sin 2u\Big|_0^{\pi/4} = \pi - 1.$$

Према томе, $l = 2L = 2(\pi - 1)$.

---

3. Израчунати

$$\iint_D (x+2)^4\, dxdy,$$

где је $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 + 4x - 2y - 1 \leq 0,\ x \geq -2,\ y \geq 1\big\}$.

Решење: Приметимо најпре да је $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 1 = (x+2)^2 + (y-1)^2 - 6$, што значи да је област D 'горња-десна' четвртина круга с центром у тачки $(-2, 1)$ и полупречником дужине $\sqrt{6}$. Трансформацијом $(x,y) \mapsto (r,t)$, где је $x = -2 + r\cos t$ и $y = 1 + r\sin t$, област интеграције D пресликава се у правоугаоник $G = [0, \sqrt{6}] \times [0, \pi/2]$.

Како је Јакобијан једнак r, то је

$$\iint_D (x+2)^4\, dxdy = \iint_G (r\cos t)^4 r drdt = \int_0^{\sqrt{6}} r^5 dr \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt = \frac{r^6}{6}\Big|_0^{\sqrt{6}} \cdot I = 36I.$$

За интеграл I имамо да је

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t)^2 dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)^2 dt \\ &= \frac{1}{4} t\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 4t}{2} dt \\ &= \frac{\pi}{8} + 0 + \frac{\pi}{16} = \frac{3\pi}{16}. \end{aligned}$$

Према томе, $\displaystyle\iint_D (x+2)^4\, dxdy = 36 \cdot \frac{3\pi}{16} = \frac{27}{4}\pi.$

Напомене. Ако се прво израчуна неодређени интеграл,

$$\int \cos^4 t dt = \frac{3}{8}t + \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{32}\sin 4t + C = F(t) + C,$$

онда је

$$I = F(t)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{8}t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{16}.$$

У радовима је било покушаја да се интеграл I израчуна увођењем смене $\tan x = t$, али нажалост без успеха. Након ове смене имамо да је

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \qquad I = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^3}.$$

Нови, овог пута несвојствени, интеграл можемо израчунати ако кренемо од једнакости

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$

и два пута применимо парцијалну интеграцију.

Најпре са $u = \dfrac{1}{1+t^2}$ и $dv = dx$ имамо да је

$$I_1 = \frac{t}{1+t^2}\Big|_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2} = 2\int_0^{\infty} \frac{t^2 + 1 - 1}{(1+t^2)^2} dt = 2I_1 - 2I_2,$$

одакле следи да је

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Сада са $u = \dfrac{1}{(1+t^2)^2}$ и $dv = dx$ имамо да је

$$I_2 = \frac{t}{(1+t^2)^2}\Big|_0^{\infty} + 4\int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^3} = 4\int_0^{\infty} \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^3} dt = 4I_2 - 4I,$$

одакле следи да је $4I = 3I_2 = \dfrac{3\pi}{4}$, односно да је $I = \dfrac{3\pi}{16}$.

Наравно, и овде може прво да се нађе неодређен интеграл,

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^3} = \frac{1}{8} \cdot \frac{3t^3+5t}{(1+t^2)^2} + \frac{3}{8}\arctan t + C = G(t) + C,$$

из којег затим добијамо $I = G(t)\Big|_0^{\infty} = \dfrac{3\pi}{16}$.
