Математика 1
2. група

Број индекса: Име и презиме:

1.	25
2.	25
3.	25
4.	25
Σ	100

1.
$$\left.\begin{aligned}(2a+3)x - y - 2(a+1)z &= 1\\ -2x + (a+2)z &= 1\\ (2a+5)x - 3y &= 3a+4\end{aligned}\right\}$$ решити систем Крамеровим правилом

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2a+3 & -1 & -2(a+1)\\ -2 & 0 & a+2\\ 2a+5 & -3 & 0\end{vmatrix} = 4(a+1)(a-1) \quad 4$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2(a+1)\\ 1 & 0 & a+2\\ 3a+4 & -3 & 0\end{vmatrix} = -(3a+4)(a-1) \quad 4$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2a+3 & 1 & -2(a+1)\\ -2 & 1 & a+2\\ 2a+5 & 3a+4 & 0\end{vmatrix} = -(3a+4)(2a+3)(a-1) \quad 4$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2a+3 & -1 & 1\\ -2 & 0 & 1\\ 2a+5 & -3 & 3a+4\end{vmatrix} = -2(a-1) \quad 4$$

1° $a \notin \{-1, 1\}$ систем има јединств. реш.

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -\frac{3a+4}{4(a+1)}\ ;\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -\frac{(3a+4)(2a+3)}{4(a+1)}\ ;\ z = -\frac{1}{2(a+1)} \quad 2$$

3° $a = -1$ систем нема решења
($\Delta = 0,\ \Delta_x \neq 0,\ \Delta_y \neq 0,\ \Delta_z \neq 0$) 2

2° $a = 1$ ($\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$)
почетни систем се своди на :
$$\left.\begin{aligned}5x - y - 4z &= 1\\ -2x + 3z &= 1\\ 7x - 3y &= 8\end{aligned}\right\}$$ Гаусов метод

$$\left.\begin{aligned}5x - y - 4z &= 1\\ -2x + 3z &= 1\end{aligned}\right\}$$

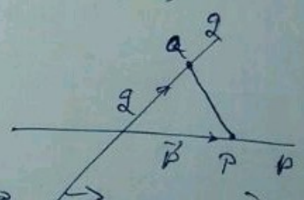
$$\Rightarrow (x,y,z) = \left(\frac{1}{2}(3\alpha - 1), \frac{7}{2}(\alpha - 1), \alpha\right)$$
$\alpha \in \mathbb{R}$

за $a = 1$ систем има једнопараметарско решење 5

2. $p: \frac{x+8}{3} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-4}{-2}$; $q: \frac{x+4}{-1} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-6}{3}$; $A(-11, 2, 3)$

а) $\vec{p} = (3, 1, -2)$ $\quad P(-8, -5, 4)$ $\quad \vec{PQ} = (4, 2, 2)$
$\vec{q} = (-1, 0, 3)$ $\quad Q(-4, -3, 6)$

$\vec{p} \neq \lambda\vec{q}$ ($\vec{p}$ и $\vec{q}$ нису колинеарни) $\Rightarrow p \nparallel q$

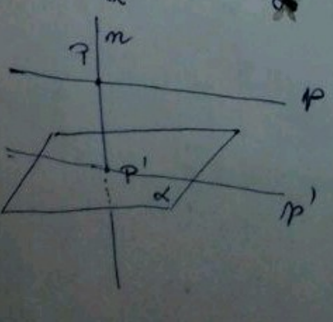


$$[\vec{p}, \vec{q}, \vec{PQ}] = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 3\\ 4 & 2 & 2\end{vmatrix} = 0 \quad \left(\begin{matrix}\text{мешовити пр.}\\ = 0\end{matrix}\right) \Rightarrow \vec{p}, \vec{q} \text{ и } \vec{PQ} \text{ су компл.}$$
$\Rightarrow p$ и q се секу. 5

$$\cos\measuredangle(p,q) = \frac{|\vec{p}\circ\vec{q}|}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|} = \frac{9}{2\sqrt{35}} \qquad \measuredangle(p,q) = \arccos\frac{9}{2\sqrt{35}} \quad 5$$

б) $A \in \alpha$
$$\left.\begin{aligned}p \parallel \alpha &\Rightarrow \vec{p} \perp \vec{n}_\alpha\\ q \parallel \alpha &\Rightarrow \vec{q} \perp n_\alpha\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 3\end{vmatrix} = (3, -7, 1)$$

$\Rightarrow \alpha: 3(x+11) - 7(y-2) + (z-3) = 0$
$\alpha: 3x - 7y + z + 44 = 0$ 7



$P \in n,\ n \perp \alpha \Rightarrow \vec{n} = \vec{n}_\alpha \Rightarrow n: \frac{x+8}{3} = \frac{y+5}{-7} = \frac{z-4}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = 3t - 8\\ y = -7t - 5\\ z = t + 4\end{cases}$

$n \cap \alpha = \{P'\}$ $\quad 3(3t-8) - 7(-7t-5) + t + 4 + 44 = 0$
$t = -1 \Rightarrow P'(-11, 2, 3) = A$

$p' \parallel p \Rightarrow \vec{p'} = \vec{p},\ P' \in p'$

$$\Rightarrow p': \frac{x+11}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1} \quad 8$$

3. $a_n = n^2\left(\ln(n+1) - \ln\sqrt{n^2+2n}\right)$, $n\in\mathbb{N}$

а) $= n^2 \ln\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+2n}} = n^2 \ln\left(\dfrac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{\frac{1}{2}} = \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2+2n}\right)^{\frac{n^2}{2}}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n^2+2n}\right)^{\frac{n^2}{2(n^2+2n)}} = e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$$ (12)

$\Rightarrow$ низ (a_n) конвергира

б) $b_n = (-1)^{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2} + \left(\dfrac{2n+1}{3n+2}\right)^{1+(-1)^n}$

$$\cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 1, & n=4k\\ 0, & n=4k+1\\ -1, & n=4k+2\\ 0, & n=4k+3\end{cases} \Rightarrow (-1)^{n+1}\cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} -1 & n=4k\\ 0 & n=4k+1\\ 1 & n=4k+2\\ 0 & n=4k+3\end{cases}$$

$$\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{1+(-1)^n} = \left(\frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}}\right)^{1+(-1)^n} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} \frac{4}{9} & n\text{ - парно}\\ 1 & n\text{ - непарно}\end{cases}$$ (13)

$$\Rightarrow b_n \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} -1+\frac{4}{9}, & n=4k\\ 0+1, & n=4k+1\\ 1+\frac{4}{9}, & n=4k+2\\ 0+1, & n=4k+3\end{cases}$$

$\Rightarrow$ тачке нагомилавања низа (b_n) су $-\frac{5}{9}, 1, \frac{13}{9}$.

---

4. $f(x) = \dfrac{x\ln x}{1-\ln x}$

1° домен: $D = (0,e)\cup(e,+\infty)$ (2)

2° парност: f није ни парна ни непарна због асиметричности домена. (1)

3° нуле и знак: $f(x)=0$ за $x=1$

	0	1	e
$\ln x$	$-$	$+$	$+$
$1-\ln x$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$

$f(x)>0$ за $x\in(1,e)$
$f(x)<0$ за $x\in(0,1)$ и за $x\in(e,+\infty)$ (3)

4° асимптоте

* $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x\ln x}{1-\ln x} = 0$; $x=0$ није В.А.

$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to e-} f(x) = +\infty\\ \lim_{x\to e+} f(x) = -\infty\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=e$ је В.А (обострано)

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \overset{\text{Л.П}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x+1}{-\frac{1}{x}} = -\infty$ нема Х.А

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} \overset{\text{Л.П}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}} = -1$ (5)

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-kx] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1-\ln x} \overset{\text{Л.П.}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{-\frac{1}{x}} = -\infty$

$\Rightarrow$ нема К.А.

5° монотоност и екстремне вредности:

$f'(x) = \dfrac{1-\ln^2 x+\ln x}{(1-\ln x)^2}$ $f'(x)=0$ за $x_1 = e^{\frac{1-\sqrt5}{2}}$, $x_2 = e^{\frac{1+\sqrt5}{2}}$

	0	x_1	e	x_2
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		мин		мах

$f_{min} = f(x_1) = \dfrac{1-\sqrt5}{1+\sqrt5}e^{\frac{1-\sqrt5}{2}}$

$f_{max} = f(x_2) = \dfrac{1+\sqrt5}{1-\sqrt5}e^{\frac{1+\sqrt5}{2}}$

f је опадајућа за $x\in(0,x_1)$ и $x\in(x_2,+\infty)$
f је растућа за $x\in(x_1,e)$ и $x\in(e,x_2)$ (6)

6° конвексност и превојне тачке:

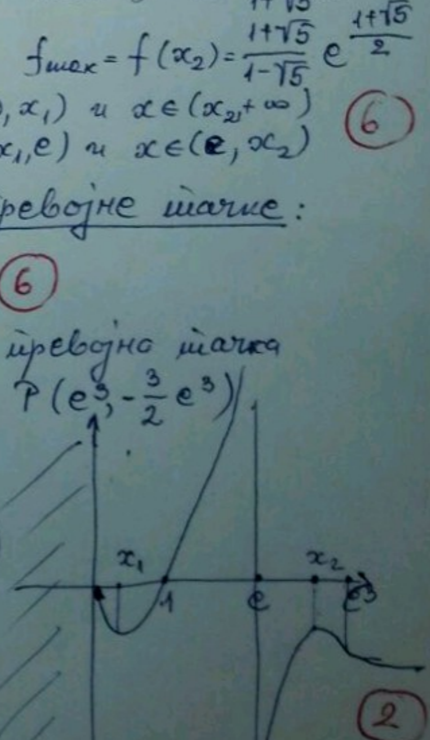
$f''(x) = \dfrac{3-\ln x}{x(1-\ln x)^3}$ (6)

	0	e	e^3
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

превојна тачка $P\left(e^3, -\frac{3}{2}e^3\right)$

f је конвексна на $x\in(0,e)$ и $x\in(e^3,+\infty)$
f је конкавна на $x\in(e,e^3)$

7° график:



(2)