$\boxed{1}$
$$\left.\begin{array}{l} 2x - y + (2a-1)z = 3 \\ (a+2)x \quad\quad -2z = 1 \\ ax - 2y + 4z = 3a+2 \end{array}\right\}$$
Решавамо задатак уз помоћ Крамерове теореме:

1	25
2	25
3	25
4	25
Σ	100

$\Delta = -4(a-1)(a+1)$ 4 $\quad \Delta_x = 2(a-1)$ 4 $\quad \Delta_y = (a-1)(6a^2+17a-12)$ 4

$\Delta_z = (a-1)(3a+4)$ 4 На основу ових вредности разликујемо случајеве:

1° $a \notin \{-1, 1\}$: јединствено решење: $(x,y,z) = \left(-\frac{1}{2(a+1)}, -\frac{6a^2+17a+12}{4(a+1)}, -\frac{3a+4}{4(a+1)}\right)$ 2

2° $a = -1$: систем нема решења. 2

3° $a = 1$: $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ - још увек неодређено. Радимо Гаусовом методом:

$$\left.\begin{array}{l} 2x \boxed{-y} + z = 3 \\ 3x \quad -2z = 1 \\ x - 2y + 4z = 5 \end{array}\right\} \cdot(-2) \; +$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x \boxed{-y} + z = 3 \\ 3x \quad \boxed{-2z} = 1 \\ -3x \quad +2z = -1 \end{array}\right\} \cdot(1) \; +$$

$$\begin{array}{l} 2x \boxed{-y} + z = 3 \\ 3x \quad \boxed{-2z} = 1 \\ \cancel{0 = 0} \end{array}$$

Систем има бесконачно много решења која зависе од једног параметра. Пошто су y и z везане, узећемо да је $x = \alpha \in \mathbb{R}$

одакле је решење:

$(x,y,z) = \left(\alpha, \frac{7\alpha-7}{2}, \frac{3\alpha-1}{2}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ 5

$\boxed{2}$ $p: \frac{x-2}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$, $q: \frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{-2}$

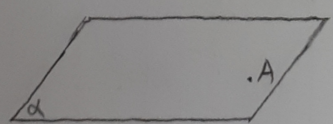
а) $\vec{v}_p = (-2,1,2) = -(2,-1,-2) = -\vec{v}_q \Rightarrow p \parallel q$ 5

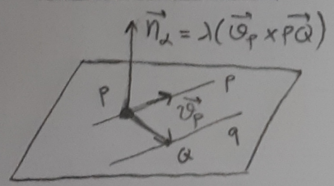
Растојање између p и q:

$$d(p,q) = d(P,q) = \frac{|\vec{v}_q \times \vec{PQ}|}{|\vec{v}_q|} \overset{1}{=} \frac{\left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \end{vmatrix}\right|}{|(2,-1,-2)|} =$$

$$= \frac{|(2,8,-2)|}{|(2,-1,-2)|} = \frac{\sqrt{2^2+8^2+(-2)^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}} = 2\sqrt{2}$$ 6

б)





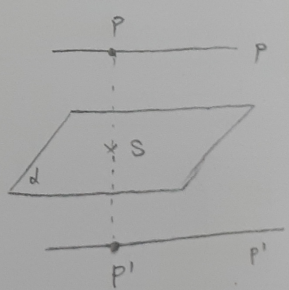
$$\vec{v}_p \times \vec{PQ} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2,-8,2) =$$

$$= -2(1,4,-1) \Rightarrow \vec{n}_\alpha = (1,4,-1)$$

Једначина равни α:

$1(x+4) + 4(y+10) - 1(z+1) = 0$

$\Leftrightarrow \; x + 4y - z + 43 = 0.$ 6



Нека је P' симетрична тачка тачке P у односу на раван α, а S пројекција P на раван α.

Тада је $\vec{PS} \perp \alpha$ и S средиште PP'

Дакле, важи $\vec{PS} = t \cdot \vec{n}_\alpha \Rightarrow S = P + t\vec{n}_\alpha =$

$= (2+t, -2+4t, 1-t) \in \alpha$ одакле је:

$2 + t + 4(-2+4t) - (1-t) + 43 = 0$

$\Leftrightarrow 18t + 36 = 0 \Leftrightarrow t = -2$ 3

Дакле, пројекција P на α је $S(0,-10,3)$ а симетрична тачка у односу на α је $P' = 2S - P = (-2,-18,5)$. Пошто је $p' \parallel p$ то је $\vec{v}_{p'} = \vec{v}_p$, одакле је једначина p':

$p': \frac{x+2}{-2} = \frac{y+18}{1} = \frac{z-5}{2}$ 4

3 а) $a_n = 2n \ln\left(\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)^{2n} =$

$= \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n^2+n+1}\right)^n = \ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+n+1}\right)^n = \ln\left(1+\frac{n}{n^2+n+1}\right)^n$

одакле је: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{n}{n^2+n+1}\right)^n =$

$= \ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+n+1}{n}}\right)^{\frac{n^2+n+1}{n}}\right)^{\frac{n^2}{n^2+n+1}}\right) =$

$= \ln\left(e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n+1}}\right) = \ln e^1 = 1.$ (10)

б) $b_n = \underbrace{\left(\frac{1+2n^{(-1)^n}}{1+3n^{(-1)^n}}\right)}_{c_n}\underbrace{\sin\frac{2n\pi}{3}}_{d_n} + \underbrace{\frac{2^n+7^{n+1}}{2^{n+1}+5\cdot 7^n}}_{e_n}$

Пошто је $(-1)^n = \begin{cases} 1, & n=2k \\ -1, & n=2k+1 \end{cases}$ то је

$\lim\limits_{k\to\infty} c_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{1+4k}{1+6k} = \frac{2}{3}$ (2)

$\lim\limits_{k\to\infty} c_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{1+\cancelto{0}{\frac{2}{2k+1}}}{1+\cancelto{0}{\frac{3}{2k+1}}} = 1$ (2)

Дакле, $T_{c_n} = \left\{\frac{2}{3}, 1\right\}$. За (d_n) важи

$d_n = \begin{cases} 0, & n=3k \\ \frac{\sqrt3}{2}, & n=3k+1 \\ -\frac{\sqrt3}{2}, & n=3k+2 \end{cases}$, тј. $T_{d_n} = \left\{0, -\frac{\sqrt3}{2}, \frac{\sqrt3}{2}\right\}$ (3)

Низ (e_n) је конвергентан:

$\lim\limits_{n\to\infty} e_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{7^n\left(\cancelto{0}{\left(\frac{2}{7}\right)^n}+7\right)}{7^n\left(2\cancelto{0}{\left(\frac{2}{7}\right)^n}+5\right)} = \frac{7}{5}$ (4)

На основу следеће табеле:

n	$\lim\limits_{n\to\infty} c_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} d_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} e_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$
$6k$	$2/3$	0	$7/5$	$7/5$
$6k+1$	1	$\sqrt3/2$	$7/5$	$\sqrt3/2 + 7/5$
$6k+2$	$2/3$	$-\sqrt3/2$	$7/5$	$-\sqrt3/3 + 7/5$
$6k+3$	1	0	$7/5$	$7/5$
$6k+4$	$2/3$	$\sqrt3/2$	$7/5$	$\sqrt3/3 + 7/5$
$6k+5$	1	$-\sqrt3/2$	$7/5$	$-\sqrt3/2 + 7/5$

Закључујемо да је скуп тачака нагомилавања:

$T_{b_n} = \left\{\frac{7}{5}, \frac{\sqrt3}{2}+\frac{7}{5}, -\frac{\sqrt3}{2}+\frac{7}{5}, \frac{\sqrt3}{3}+\frac{7}{5}, -\frac{\sqrt3}{3}+\frac{7}{5}\right\}$ (4)

4 $f(x) = \frac{1-\ln x}{x\ln x}$

1° $D_f = (0,1)\cup(1,+\infty)$ (3)

2° $f(x)=0 \Leftrightarrow x=e$. На основу табеле:

	0	1	e
$1-\ln x$	$+$	$+$	$-$
$x\ln x$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$

Закључујемо да важи

$f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(1,e)$

$f(x)<0 \Leftrightarrow x\in(0,1)\cup(e,+\infty)$ (3)

3° Домен ф-је није симетричан у односу на координатни почетак $\Rightarrow$ ф-ја није ни парна ни непарна (1)

4° $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cancelto{0}{\frac{1}{\ln x}}-1}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to1\pm} f(x) = \lim\limits_{x\to1\pm}\frac{\cancelto{\pm\infty}{\frac{1}{\ln x}}-1}{x} = \pm\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancelto{0}{\frac{1}{\ln x}}-1}{x} = 0^-$

Закључак: $x=0$ и $x=1$ су вертикалне асимптоте ф-је f, а $y=0$ је њена хоризонтална асимптота. (2)+(2)+(2)

5° $f'(x) = \frac{\ln^2 x-\ln x-1}{x^2\ln^2 x}$ (3) $f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln^2 x-\ln x-1=0$ $(x\in D_f)$

$\Leftrightarrow x = e^{\frac{1-\sqrt5}{2}} \vee x = e^{\frac{1+\sqrt5}{2}}$ На основу табеле

	0	$e^{\frac{1-\sqrt5}{2}}$	1	$e^{\frac{1+\sqrt5}{2}}$
$\ln^2 x-\ln x-1$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x^2\ln^2 x$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

закључујемо да ф-ја расте на $\left(0, e^{\frac{1-\sqrt5}{2}}\right)$ и $\left(e^{\frac{1+\sqrt5}{2}}, +\infty\right)$, опада на $\left(e^{\frac{1-\sqrt5}{2}}, 1\right)$ и $\left(1, e^{\frac{1+\sqrt5}{2}}\right)$, има локални максимум у $x_{max} = e^{\frac{1-\sqrt5}{2}}$ и локални минимум у $x_{min} = e^{\frac{1+\sqrt5}{2}}$ (3)

6° $f''(x) = \frac{(2-\ln x)(2\ln^2 x+2\ln x+1)}{x^3\ln^3 x}$ (3) Пошто је

$2\ln^2 x+2\ln x+1 = \ln^2 x+(\ln x+1)^2>0$ то је $f''(x)=0$

$\Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x=e^2$. На основу табеле закључујемо да је ф-ја конвексна на $(1,e^2)$, конкавна на $(0,1)$ и $(e^2,+\infty)$ и има превојну тачку $P\left(e^2, -\frac{1}{e^2}\right)$. (3)

		1	e^2
$2-\ln x$	$+$	$+$	$-$
$\ln^3 x$	$-$	$+$	$+$
$\frac{2\ln^2 x+2\ln x+1}{x^3}$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$