ДУЖИНА КРИВЕ У РАВНИ

Решени примери и задаци за вежбу

Драган Ђорић

1 Крива у Декартовим координатама

Нека је $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекидно диференцијабилна функција. Крива k дефинисана функцијом f је $\{(x, y) : x \in [a, b],\ y = f(x)\}$ (график функције f). Дужина l криве k дата је формулом

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \tag{1}$$

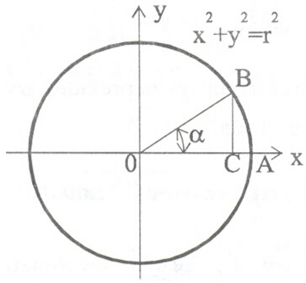
За извођење ове формуле треба видети [1].

Решени примери

1.1. Израчунати дужину лука који одговара централном углу α кружнице $x^2+y^2 = r^2$.

Решење. Лук BA који одговара централном углу α је део криве $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ на одсечку CA, односно за $x \in [r \cos\alpha, r]$. Према фомули (1) за дужину криве имамо

$$\begin{aligned} l &= \int_{r\cos\alpha}^{r} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= r \int_{r\cos\alpha}^{r} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\ &= r\alpha. \end{aligned}$$



Специјално, за $\alpha = 2\pi$ добија се дужина целе кружнице, $l = 2r\pi$.

У наредним задацима треба израчунати дужину криве одређене датом функцијом на датом одсечку.

1.2. $y = ax^2,\ x \in [0, b]$.

Решење. Према формули (1) за дужину криве имамо да је $l = \displaystyle\int_0^b \sqrt{1 + 4a^2x^2} dx$. Како је

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{1 + 4a^2x^2} dx = x\sqrt{1 + 4a^2x^2} - \int \frac{4a^2x^2}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}} dx \\ &= x\sqrt{1 + 4a^2x^2} - \int \sqrt{1 + 4a^2x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}} \\ &= x\sqrt{1 + 4a^2x^2} - I + \frac{1}{2a} \ln|2ax + \sqrt{1 + 4a^2x^2}|, \end{aligned}$$

то је

$$I = \frac{1}{2}x\sqrt{1+4a^2x^2} + \frac{1}{4a}\ln|2ax + \sqrt{1+4a^2x^2}| + C,$$

па је

$$l = \frac{1}{2}b\sqrt{1+4a^2b^2} + \frac{1}{4a}\ln|2ab + \sqrt{1+4a^2b^2}|.$$

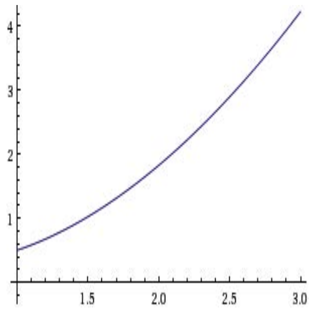
Специјално, за $a = b = 1$, дужина дела параболе $y = x^2$ на одсечку $[0,1]$ једнака је $l = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln|2+\sqrt{5}|$.

1.3. $y = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}$, $x \in [1,3]$ (задатак 112, стр.89 у [4])

Решење. За $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}$ имамо да је

$$f'(x) = x - \frac{1}{4x}, \quad f'^2(x) = x^2 + \frac{1}{16x^2} - \frac{1}{2}$$

$$1 + f'^2(x) = \frac{1}{2} + x^2 + \frac{1}{16x^2} = \left(x + \frac{1}{4x}\right)^2,$$



па је $\sqrt{1+f'^2(x)} = x + \frac{1}{4x}$.

Према формули (1) за дужину криве

$$l = \int_1^3 \left(x + \frac{1}{4x}\right)\, dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\ln x\,\Big|_1^3,$$

односно $l = \frac{9}{2} + \frac{1}{4}\ln 3 - \frac{1}{2} = 4 + \frac{1}{4}\ln 3$.

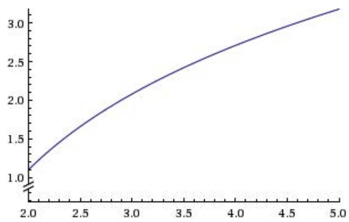
1.4. $y = \ln(x^2-1)$, $x \in [2,5]$. (задатак 115, стр.89 у [4])

Решење. За $f(x) = \ln(x^2-1)$ је

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2-1}, \quad 1 + f'^2(x) = 1 + \frac{4x^2}{(x^2-1)^2},$$

па је

$$1 + f'^2(x) = \frac{(x^2-1)^2 + 4x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{(x^2+1)^2}{(x^2-1)^2}.$$



Према формули (1) за дужину криве

$$\begin{aligned} l &= \int_2^5 \frac{x^2+1}{x^2-1}dx = \int_2^5 dx + 2\int_2^5 \frac{dx}{x^2-1} \\ &= x\,\Big|_2^5 + 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\,\Big|_2^5 \\ &= 3 + \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{3} = 3 + \ln 2. \end{aligned}$$

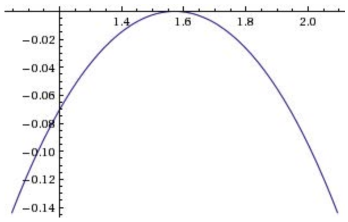
1.5. $y = \ln(\sin x)$, $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$ (задатак 117, стр.89 у [4])

Решење. Како је

$$y' = \cot x, \quad 1 + y'^2(x) = 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x},$$

то је

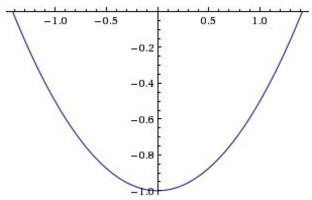
$$
\begin{aligned}
l &= \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} \\
&= \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}} = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)\Big|_{\pi/3}^{2\pi/3} \\
&= \ln\sqrt{3} - \ln\frac{1}{\sqrt{3}} = \ln\sqrt{3} + \ln\sqrt{3} \\
&= \ln 3.
\end{aligned}
$$



1.6. $y = \dfrac{x^2}{2} - 1$ испод x-осе

Решење. Како је $y' = x$, то је

$$
\begin{aligned}
l &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2}\,dx = 2\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2}\,dx \\
&= 2\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \\
&= 2\int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx \\
&= 2\ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^{\sqrt{2}} + 2J.
\end{aligned}
$$



За интеграл J парцијалном интеграцијом са $u = x,\ dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$, $v = \sqrt{1+x^2}$ налазимо да је

$$2J = 2x\sqrt{1+x^2}\Big|_0^{\sqrt{2}} - 2\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2}\,dx = 2\sqrt{6} - l.$$

Према томе,

$$l = 2\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3}) + 2\sqrt{6} - l, \quad l = \ln(\sqrt{2}+\sqrt{3}) + \sqrt{6}.$$

1.7. $y = \ln\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1},\ x \in [1,2].$

Решење. Задатак је решен у [1].

1.8. $y = \ln(1-x^2),\ x \in [-1/2, 1/2].$

Решење. Задатак је решен у [3].

1.9. $y = \ln(1-x^2),\ x \in [0, 1/2].$

Решење. Задатак је решен у [3], стр.122 (Колоквијум, 2015).

1.10. $y = \dfrac{1}{3}\sqrt{x}(x-3),\ x \in [1,9].$

Решење. Задатак је решен у [3], стр.125 (Колоквијум, 2015).

1.11. $y = \dfrac{x^2}{4}(2\ln x - 1) - \dfrac{1}{4}\ln(\ln x),\ x \in [e, e^2].$

Решење. Задатак је решен у [2].

1.12. $y = \ln \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$, $x \in [1,2]$

Решење. Задатак је решен у [2].

1.13. $y = \sqrt{x^2-48} + 4\sqrt{6}\ln(x+\sqrt{x^2-48})$, $x \in [7,8]$

Решење. Задатак је решен у [2].

1.14. $y = \sqrt{x^2-16} - 4\sqrt{2}\ln(x+\sqrt{x^2-16})$, $x \in [4,5]$.

Решење. Задатак је решен у [3], стр.144 (Колоквијум, 2013).

1.15. $y = 3\ln(x-\sqrt{x^2-9})$, $x \in [3,5]$.

Решење. Задатак је решен у [3], стр.183 (Писмени испит, фебруар, 2014).

1.16. $y = \ln \dfrac{1}{\cos x}$, $x \in [0,\pi/3]$.

Решење. Задатак је решен у [3], стр.198 (Писмени испит, октобар, 2014).

1.17. $y = \arcsin(e^{-x})$, $x \in [0,1]$.

Решење. Задатак је решен у [3], стр.200 (Писмени испит, октобар, 2014).

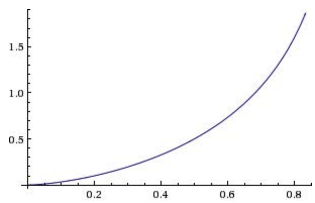
1.18. $y = 2\ln(x+\sqrt{x^2-4})$, $x \in [2,\sqrt{5}]$.

Решење. Задатак је решен у [3], стр.173 (Писмени испит, септембар, 2015).

1.19. $y = x\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$, $x \in [0,5/6]$. (задатак 120, стр.89 у [4])

Решење. Како је $1+y'^2 = \dfrac{3x-4}{4(x-1)^3}$, то је $l = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{5/6}\sqrt{\dfrac{4-3x}{(1-x)^3}}dx = \dfrac{1}{2}I$. Сменом $\dfrac{1}{1-x} = t$ имамо да је $I = \displaystyle\int_1^6 \dfrac{\sqrt{t+3}}{t}dt$, а новом сменом $t+3=u^2$ добијамо

$$\begin{aligned} I &= 2\int_2^3 \frac{u^2du}{u^2-3} \\ &= 2\int_2^3 du + 6\int_2^3 \frac{du}{u^2-3} \\ &= 2u\Big|_2^3 + \frac{3}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{u+\sqrt{3}}{u-\sqrt{3}}\right|\Big|_2^3 \\ &= 2+\sqrt{3}\ln(2+\sqrt{3}). \end{aligned}$$



Према томе, $l = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln(2+\sqrt{3})$.

1.20. Израчунати обим фигуре ограничене линијама

$$y = -x^2+3x, \quad y = |x-3/2|+3/2.$$

Решење. Задатак је решен у [2].

Задаци за самосталан рад

1.21. $y=\sqrt{2x-x^2}-1,\ \ x\in[1/4,1]$.

Резултат. $\arcsin\frac{3}{4}$.

1.22. $y=\frac{x}{6}\sqrt{x+12},\ \ x\in[-11,-3]$

Резултат. $25/3$.

1.23. $y=\sqrt{\frac{x}{3}}(1-x),\ \ x\in[1/2,1]$

Резултат. $\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

1.24. $y=\sinh^2 x,\ \ x\in[-a,a],\ \ a>0$

Резултат. $\sinh 2a$.

1.25. $y=\ln\cos x,\ \ x\in[0,\pi/4]$.

Резултат. $\ln\tan\frac{3\pi}{8}$.

1.26. $y=\ln(x-\sqrt{x^2-1}),\ \ x\in[2,3]$

Резултат. $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

1.27. $y=\ln(1+\sin x)\ \ x\in[0,\pi/2]$

Резултат. $2\ln(1+\sqrt{2})$.

1.28. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x,\ \ x\in[0,9/16]$

Резултат. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

1.29. $y=\sqrt{x-x^2}-\arccos\sqrt{1-x},\ \ x\in[11/36,15/16]$

Резултат. $\frac{7}{6}$.

1.30. $y=2\sqrt{e^x-1}-2\arctan\sqrt{e^x-1},\ \ x\in[0,2]$

Резултат. $2(e-1)$.

1.31. $y=\sqrt{x^2-32}+8\ln(x+\sqrt{x^2-32}),\ \ x\in[6,9]$

Резултат. $\sqrt{2}(5+4\ln 2)$.

1.32. Израчунати обим фигуре ограничене линијама

$$x=1,\quad y=0,\quad y=2\ln\frac{4}{4-x^2}.$$

Резултат. $l=4\ln 2$.

2 Крива у параметарском облику

Ако је крива задата параметарски са $x = x(t)$ и $y = y(t)$ за $t \in [t_1, t_2]$, где су функције $x : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ и $y : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ непрекидно диференцијабилне, онда је

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt. \tag{2}$$

Решени примери

2.1. $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ t \in [0, 2\pi].$ (Астроида, задатак 123, стр.89 у [4])

Решење. Како је

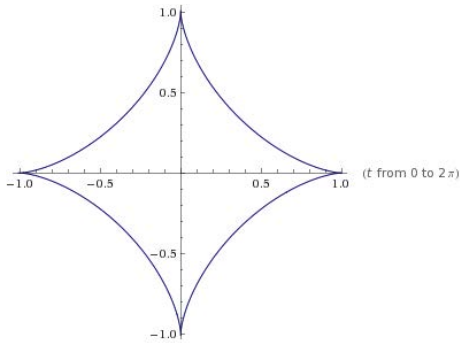
$$x'^2 = 9a^2\cos^4 t\sin^2 t, \quad y'^2 = 9a^2\sin^4 t\cos^2 t,$$

то је

$$x'^2 + y'^2 = 9a^2\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t) = 9a^2\cos^2 t\sin^2 t.$$

Према формули (2) за дужину криве имамо да је

$$\begin{aligned} l &= 4\cdot 3a\int_0^{\pi/2}\cos t\sin t\, dt \\ &= 12a\int_0^{\pi/2}\sin t d(\sin t) \\ &= 6a\ \sin^2 t\Big|_0^{\pi/2} \\ &= 6a. \end{aligned}$$



Питање. Ако се формула за дужину криве примени на целом одсечку $[0, 2\pi]$ добија се

$$l = 3a\int_0^{2\pi}\cos t\sin t\, dt = \frac{3a}{2}\sin^2 t\Big|_0^{2\pi} = 0\,!$$

Где је грешка?

На слици је астроида за $a = 1$, а задатак је решен и у [3].

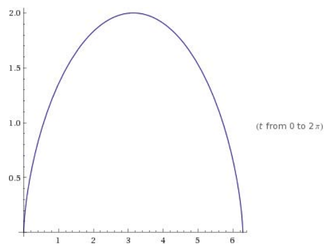
2.2. $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ t \in [0, 2\pi]$ (Циклоида, задатак 124, стр.89 у [4])

Решење. Како је $x' = a(1 - \cos t)$, и $y' = a\sin t$, то је

$$x'^2 + y'^2 = a^2(1 + \cos^2 t - 2\cos + \sin^2 t) = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2\sin^2\frac{t}{2}.$$

Према формули (2) за дужину криве имамо да је

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\, dt \\ &= 2a\left(-\cos\frac{t}{2}\right)\cdot 2\Big|_0^{2\pi} \\ &= 4a(1+1) \\ &= 8a. \end{aligned}$$



На слици је циклоида за $a = 1$.

2.3. $x = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t,\ \ y = (t^2-2)\cos t - 2t\sin t,\ \ t \in [0,\pi].$

Решење. Задатак је решен у [3].

2.4. $x = t^2\cos\frac{1}{t},\ \ y = t^2\sin\frac{1}{t},\ \ t \in [1/2, \sqrt{2}].$

Решење. Задатак је решен у [3], стр.137 (Колоквијум, 2014).

2.5. $x = (2t^2-1)\cos 2t - 2t\sin 2t,\ \ y = (2t^2-1)\sin 2t + 2t\cos 2t - \frac{4}{3}t^3,\ \ t \in [0,\pi].$

Решење. Задатак је решен у [3], стр.150 (Колоквијум, 2013).

2.6. $x = 2\sqrt{2}\sqrt{1-t^2},\ \ y(t) = t\sqrt{1-t^2},\ \ t \in [0,1]$

Решење. Задатак је решен у [2].

2.7. $x = \frac{t^2}{2},\ \ y = \ln t,\ \ t \in [1,2].$

Решење. Задатак је решен у [2].

Задаци за самосталан рад

2.8. $x = t,\ \ y = \frac{t^2}{2},\ \ t \in [0,1].$

Резултат. $\frac{1}{\sqrt{2}} + \ln\sqrt{1+\sqrt{2}}.$

2.9. $x = t,\ \ y = -t^2+4,\ \ t \in [0,2].$

Резултат. $\sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln(4+\sqrt{17}).$

2.10. $x = \cosh^3 t,\ \ y = \sinh^3 t,\ \ t \in [0,1]$

Резултат. $\frac{1}{2}(cosh^{3/2}2 - 1).$

2.11. $x = 1-\cos 2t,\ \ y = \sin t - \frac{1}{3}\sin 3t,\ \ t \in [0,\pi/2]$

Резултат. $\frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1).$

2.12. $x = \sin^3 t,\ \ y = \cos 2t,\ \ t \in [0,\pi/2]$

Резултат. $61/27.$

2.13. $x = \sin^4 t,\ \ y = \cos^2 t,\ \ t \in [0,\pi/2]$

Резултат. $\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5}).$

2.14. $x = \cos^4 t,\ \ y = \sin^4 t,\ \ t \in [0,\pi/2]$

Резултат. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2}).$

2.15. $x = \sinh t - t,\ \ y = \cosh t - 1,\ \ t \in [0,7]$

Резултат. $10 - \sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1).$

2.16. $x = \displaystyle\int_1^t \frac{\cos u}{u} du,\ \ y = \int_1^t \frac{\sin u}{u} du, t \in [1,2].$

Резултат. $\ln \dfrac{\pi}{2}$.

3 Крива у поларним координатама

Ако је крива задата у поларним координатама са $r = r(\varphi)$ за $\varphi \in [\alpha, \beta]$, где је функција $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ непрекидно диференцијабилна, тада је

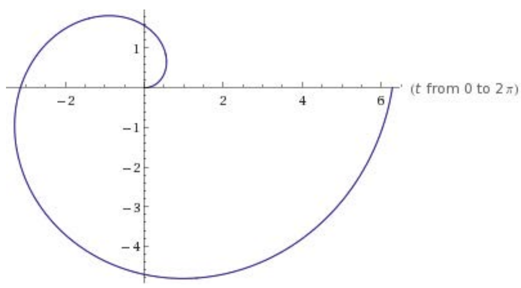
$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi. \tag{3}$$

Решени примери

3.1. $r = a\varphi,\ \ \varphi \in [0, 2\pi],\ \ a > 0$ (Архимедова спирала)

Решење. Према формули (3) за дужину криве у поларним координатама имамо да је

$$\begin{aligned}
l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\, d\varphi \\
&= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \varphi^2}\, d\varphi \\
&= a \left[\frac{\varphi}{2}\sqrt{\varphi^2 + 1} + \frac{1}{2}\ln(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}) \right] \Big|_0^{2\pi} \\
&= a \left[\pi\sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}\right) \right].
\end{aligned}$$

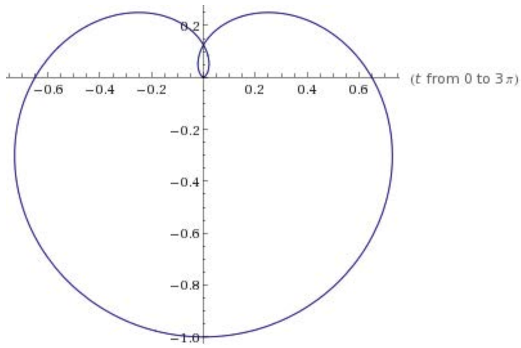


На слици је Архимедова спирала за $a = 1$.

3.2. $r = a\sin^3 \dfrac{\varphi}{3},\ \ \varphi \in [0, 3\pi],\ \ a > 0$

Решење. Према формули (3) за дужину криве у поларним координатама имамо да је

$$\begin{aligned}
l &= a \int_0^{3\pi} \sqrt{\sin^6 \frac{\varphi}{3} + \sin^4 \frac{\varphi}{3} \cos^2 \frac{\varphi}{3}}\, d\varphi \\
&= a \int_0^{3\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{3} \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi}{3} + \cos^2 \frac{\varphi}{3}}\, d\varphi \\
&= a \int_0^{3\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{3}\, d\varphi \\
&= \frac{a}{2} \int_0^{3\pi} \left(1 - \cos\frac{2\varphi}{3}\right)\, d\varphi \\
&= \frac{3\pi a}{2}.
\end{aligned}$$



На слици је дата крива за $a = 1$.

Задаци за самосталан рад

3.3. $r = a(1 + \cos\varphi),\ \ \varphi \in [0, 2\pi],\ \ a > 0.$ (Кардиоида)

Резултат. $8a$.

3.4. $r = 4\cos^3\dfrac{\varphi}{3},\ \ \varphi \in [0, 3\pi/2]$.

Резултат. 3π.

3.5. $r = a(1 - \sin\varphi),\ \ \varphi \in [-\pi/2, -\pi/6]$

Резултат. $2a$.

3.6. $r = a\sin^4\dfrac{\varphi}{4}\ \ \varphi \in [0, 4\pi]$

Резултат. $16a/3$.

Литература

[1] Стојановић, М., Михић, О., *Математика 2*, ФОН, Београд, 2013.

[2] Ђорић, Д., *Математика 2 - решени примери са испита и колоквијума*, ФОН, Београд, 2014.

[3] Тодорчевић, В., Џамић, Д., Младеновић, Н., Николић, Н., *Математика 2 - збирка задатака*, ФОН, Београд, 2016.

[4] Ђорић, Д., Лазовић, Р., Јованов., Ђ., *Математика 2 - збирка задатака и примери колоквијума*, ФОН, Београд, 2009.