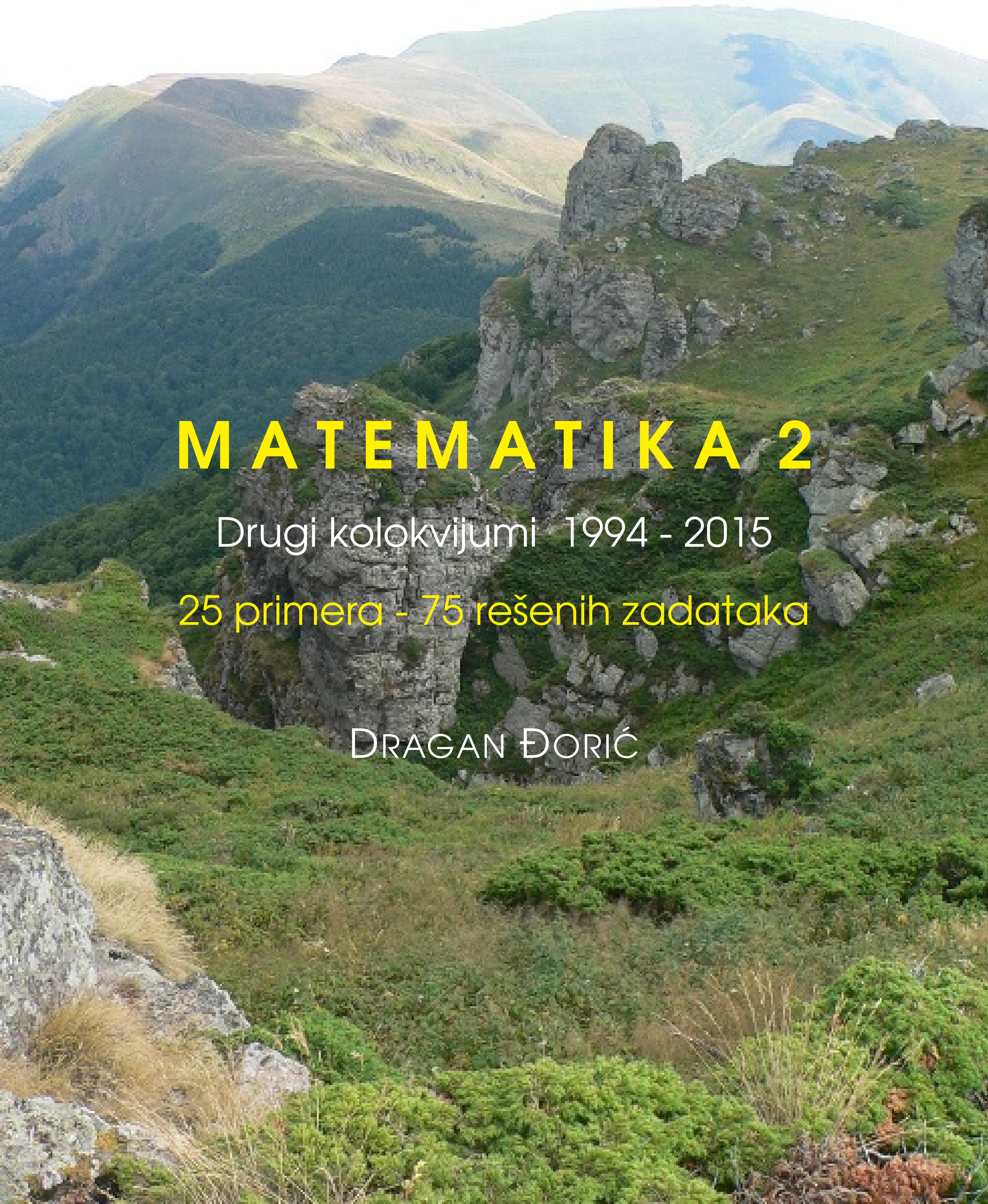


MATEMATIKA 2

Drugi kolokvijumi 1994 - 2015

25 primera - 75 rešenih zadataka

Dragan Đorić

Fakultet organizacionh nauka, Beograd

Studentima generacije 2015/2016 (grupe A1 i A5)

PROF DRAGAN ĐORIĆ, djoricd@fon.bg.ac.rs

Maj, 2016

МАТЕМАТИКА 2

Други колоквијум (28.5.1994) - Група 2

1. Израчунати $\int \sin x \cdot \arctan(\cos x)\, dx$.

Решење: Сменом $\cos x = t$ имамо да је $I = \int \sin x \cdot \arctan(\cos x)\, dx = -\int \arctan t\, dt$. Сада парцијалном интеграцијом са $u = \arctan t$ и $dv = dt$ добијамо да је

$$\int \arctan t\, dt = t \arctan t - \int \frac{tdt}{1+t^2} = t\arctan t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C.$$

Према томе,

$$I = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) - t\arctan t + C = \frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x) - \cos x \cdot \arctan(\cos x) + C.$$

2. Израчунати површину фигуре ограничене кривом $3y^2 = x$ и кривом $y^2 = 2x - 10$.

Решење: Дате криве су параболе, а њихове пресечне тачке су $A(6, -\sqrt{2})$ и $B(6, \sqrt{2})$. Фигура коју ограничавају ове параболе је симетрична у односу на x-осу, па је њена површина P дата са

$$P = 2\int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{y^2+10}{2} - 3y^2\right) dy = \int_0^{\sqrt{2}} (10 - 5y^2)dy = 10y - \frac{5}{3}y^3 \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{20}{3}\sqrt{2}.$$

3. Израчунати $\iint_{\mathcal{D}} (x-3)^4\, dx\, dy$ где је

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y)\ ;\ x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 \le 0,\ \ x \le 3\right\}.$$

Решење: Дата област $\mathcal{D}$ је половина круга $(x-3)^2 + (y+1)^2 \le 2^2$. Сменом $x - 3 = \rho\cos\phi$, $y + 1 = \rho\sin\phi$ добијамо нову област $G = \{(\varphi, \rho)\ :\ \pi/2 \le \varphi \le 3\pi/2,\ 0 \le \rho \le 2\}$, при чему је Јакобијан једнак ρ. Дати интеграл I рачунамо у новим координатама,

$$I = \iint_G \rho^5 \cos^4\ d\varphi d\rho = \int_0^2 \rho^5 d\rho \cdot \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^4\varphi d\varphi = \frac{32}{3}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^4\varphi d\varphi = \frac{32}{3}J.$$

Како је

$$\begin{aligned}\int \cos^4\varphi d\varphi &= \frac{1}{4}\int (1+\cos 2\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{4}\varphi + \frac{1}{2}\int \cos 2\varphi d\varphi + \frac{1}{4}\int \cos^2 2\varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{4}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi + \frac{1}{8}\int (1 + \cos 4\varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{32}(12\varphi + 8\sin 2\varphi + \sin 4\varphi),\end{aligned}$$

то је $J = \frac{3}{8}\pi$ и $I = 4\pi$.

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Други колоквијум (1995) - Група 1

1. Израчунати $\displaystyle\int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} dx$

Решење: Ако је

$$I = \int \arctan x dx, \qquad \text{a} \quad J = \int \frac{\arctan x dx}{1+x^2} dx,$$

онда је дати интеграл једнак $I - J$. Парцијалном интеграцијом добијамо да је

$$I = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_1,$$

а сменом $t = \arctan x$ добијамо да је

$$J = \frac{1}{2} \arctan^2 x + C_2.$$

Према томе,

$$\int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} dx = x \arctan x + \frac{1}{2} \arctan^2 x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

2. Израчунати површину коју ограничавају x - оса, права $x = 1$ и график функције

$$f \;:\; x \mapsto \frac{\ln x}{(x-1)^{3/2}}.$$

Решење: Тражена површина се може израчунати интеграљењем дате функције у границама од 1 до $+\infty$. Сменом $x - 1 = t^2$, а затим парцијалном интеграцијом добија се

$$\int \frac{\ln x dx}{(x-1)^{3/2}} = 2 \int \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dt = -\frac{2 \ln x}{\sqrt{x-1}} + 4 \arctan \sqrt{x-1} = F(x),$$

па је

$$P = \lim_{b \to +\infty} F(b) - \lim_{a \to 1+} F(a) = 2\pi.$$

3. Израчунати $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} xy \, dx \, dy$ где је $\mathcal{D}$ област ограничена кривама

$$2x - y = 1, \quad 2x - y = 3, \quad y + x = -2, \quad x + y = 0.$$

Решење: Сменом $\begin{cases} u = 2x - y \\ v = x + y \end{cases}$ односно $\begin{cases} x = (u+v)/3 \\ y = (2v-u)/3 \end{cases}$ добија се да је

$$\iint_{\mathcal{D}} xy \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}_1} (u+v)(2v-u)|J| \, du \, dv,$$

где је

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \frac{1}{3}, \quad \mathcal{D}_1 = \{(u,v), \; 1 \le u \le 3, \; -2 \le v \le 0\}.$$

Свођењем на двоструки интеграл добија се да је

$$
\begin{aligned}
\iint_D xydxdy &= \frac{1}{27}\iint_G (u+v)(2v-u)dudv \\
&= \frac{1}{27}\int_1^3 du \ \int_{-2}^0 (-u^2+2v^2+uv)dv \\
&= \frac{1}{27}\int_1^3 \left(-u^2v+\frac{2}{3}v^3+\frac{1}{2}uv^2\right)\Big|_{-2}^0 du \\
&= \frac{1}{27}\int_1^3 \left(-2u^2+\frac{16}{3}-2u\right)du \\
&= -\frac{44}{81}.
\end{aligned}
$$

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Други колоквијум (1995) - Група 2

1. Израчунати $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx$.

Решење: Ако је

$$I=\int \frac{\arctan x}{x^2}dx, \qquad \text{а} \qquad J=\int \frac{\arctan x dx}{1+x^2}dx,$$

онда је дати интеграл једнак $I-J$. Парцијалном интеграцијом добијамо да је

$$I=-\frac{1}{x}\arctan x+\int \frac{dx}{x(1+x^2)}=-\frac{1}{x}\arctan x+\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}+C_1,$$

а сменом $t=\arctan x$ добијамо да је $J=\arctan^2 x/2+C_2$. Према томе,

$$\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx=-\frac{1}{x}\arctan x-\frac{1}{2}\arctan^2 x+\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

2. Израчунати површину коју ограничавају позитиван део x - осе и графици функција

$$f\ :\ x\mapsto \frac{8}{x^2+4}, \qquad g\ :\ x\mapsto \frac{4x}{x^2+4}.$$

Решење: Пресечна тачка $A(2,1)$ датих кривих добија се решавањем система

$$y=\frac{8}{x^2+4}, \qquad y=\frac{4x}{x^2+4},\ x>0.$$

За $0<x<2$ је $\dfrac{4x}{x^2+4}<\dfrac{8}{x^2+4}$, а за $x>2$ је $\dfrac{4x}{x^2+4}>\dfrac{8}{x^2+4}$, па је

$$P=\int_0^2 \frac{4x}{x^2+4}dx+\int_2^{+\infty}\frac{8}{x^2+4}dx=2\ln 2+\pi.$$

3. Израчунати $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$ где је $\mathcal{D}$ област ограничена кривама

$$x^2+y^2=4x, \quad x^2+y^2=8x, \quad y=x, \quad y=\sqrt{3}x.$$

Решење: Сменом $x=\rho\cos\phi$, $y=\rho\sin\phi$ добијамо да је

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy=\int_{\pi/4}^{\pi/3}d\phi\int_{4\cos\phi}^{8\cos\phi}\frac{d\phi}{\rho^3}=\frac{1}{64}\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{d\phi}{\cos^2\phi}=\frac{\sqrt{3}-1}{64}.$$

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Други колоквијум (25.5.1996) - Група 1

1. Израчунати $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x}dx.$

Решење: Ако је $t = \sqrt{\sin x}$ $(x \in [0, \pi/2))$, онда је

$$I = \int \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x}dx = \int \frac{dt}{1-t^2} - \int \frac{dt}{1+t^2}, \quad t \in [0,1],$$

па је

$$I = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}} - \arctan\sqrt{\sin x} + C, \quad x \in [0, \pi/2).$$

2. Фигура ограничена кривом $y = 2x - x^2$ и правама $y = 1$ и $x = 0$ ротира око y - осе. Израчунати запремину тако насталог тела.

Решење: Ако је V_F запремина тела које настаје ротацијом дате фигуре (F) око y осе, онда је

$$V_F = \pi\int_0^1 x^2(y)dy = \pi\int_0^1 (1-\sqrt{1-y})^2 dy = \frac{\pi}{6}.$$

Друго решење. Ако је V_G запремина тела које настаје ротацијом око y осе фигуре ограничене датом кривом и правама $x = 1$ и $y = 0$, онда је

$$V_F = \pi - V_G = \pi - 2\pi\int_0^1 (2x^2 - x^3)dx = \frac{\pi}{6}.$$

3. Израчунати $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} y\,dx\,dy$ ако је

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \ : \ x^2+y^2 \le 12, \ y \le \frac{6-x}{\sqrt{3}}, \ x \ge 0, \ y \ge 0\right\}.$$

Решење: Ако је I дати интеграл, онда је

$$I = \int_0^{\pi/6} d\phi \int_0^{2\sqrt{3}} \rho^2 \sin\phi \, d\phi + \int_0^3 dx \int_{x/\sqrt{3}}^{(6-x)/\sqrt{3}} y dy = 8\sqrt{3} - 3.$$

Други начин. Ако правом $x = 3$ поделимо дату област на два дела, онда је

$$I = \int_0^3 dx \int_0^{-\sqrt{3}x/3+2\sqrt{3}} y dy + \int_3^{2\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{12-x^2}} y dy = 8\sqrt{3} - 3.$$

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Други колоквијум (25.5.1996) - Група 2

1. Израчунати $\displaystyle\int \frac{5e^x}{e^{4x}-3e^{2x}-4}dx.$

Решење: Ако је $e^x = t$, $(x \in (-\infty, \ln 2)$ или $x \in (\ln 2, +\infty))$, онда је

$$\int \frac{5e^x}{e^{4x}-3e^{2x}-4}dx = \int \frac{5dt}{(t^2-4)(t^2+1)}, \quad t \in (2,+\infty) \text{ или } t \in (0,2).$$

Како је

$$\frac{5}{(t^2-4)(t^2+1)} = \frac{1}{t^2-4} - \frac{1}{t^2+1},$$

то је

$$\int \frac{5e^x}{e^{4x}-3e^{2x}-4}dx = \frac{1}{4}\ln\frac{e^x-2}{e^x+2} - \arctan e^x + C \text{ за } x > \ln 2,$$

односно

$$\int \frac{5e^x}{e^{4x}-3e^{2x}-4}dx = \frac{1}{4}\ln\frac{2-e^x}{e^x+2} - \arctan e^x + C \text{ за } x < \ln 2.$$

2. Нека је $\displaystyle I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a+x^2}$, $a \in R$.

(а) Одредити скуп A свих вредности a за које интеграл $I(a)$ конвергира.

(б) За $a \in A$ израчунати $I(a)$.

Решење: (а) Пошто је $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{a+x^2}$ парна функција, довољно је испитати конвергенцију интеграла $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a+x^2}$.

(1) Ако је $a = 0$, онда је $f(x) = 1/x^2$, па је $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ дивергентан.

(2) Ако је $a > 0$, онда је $f(x) \sim 1/x^2$ $(x \to +\infty)$, па је $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ конвергентан, а тиме и $I(a)$.

(3) Ако је $a < 0$, онда је $f(x) \sim \dfrac{1}{2b}\dfrac{1}{x-b}$ $(x \to b)$, где је $a = -b^2$, па је $\displaystyle\int_b^{b+1} f(x)dx$ дивергентан.

Према томе, $A = (0, \infty)$.

(б) За $a \in A$ је

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a+x^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x/\sqrt{a})}{1+(x/\sqrt{a})^2} = \frac{\pi}{\sqrt{a}}.$$

3. Израчунати запремину тела ограниченог површима:

$$z = 9 - x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 - 2xy = 0, \quad z = 0.$$

Решење: Постоје два тела ограничена датим површима. Једно тело (T_1) је део ваљка између $z = 0$ и $z = 9 - x^2 - y^2$, а друго (T_2) је део параболоида (P) без T_1. Према томе,

$$V_{T_1} = \int_0^{\pi} d\phi \int_0^3 \rho(9-\rho^2)\, d\rho = \frac{15\pi}{2},$$

$$V_P = 4\int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^3 \rho(9-\rho^2)\, d\rho = \frac{81\pi}{2}$$

и $V_{T_2} = V_P - V_{T_1} = 33\pi$.

Напомена. Може и

$$V_{T_2} = \frac{V_P}{2} + 2\int_0^{\pi/2} d\phi \int_{2\sin\phi}^3 (9-\rho^2)\rho d\rho.$$

Драган Ђорић

IV KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE I - 1996

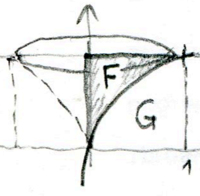
- Rešenja -

I GRUPA

1. AKO JE $t=\sqrt{\sin x}$ $(x\in[0,\pi/2))$, ONDA JE $\int\frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x}dx=\int\frac{dt}{1-t^2}-\int\frac{dt}{1+t^2}$ $(t\in[0,1))$, PA J

$$\int\frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}}-\arctan\sqrt{\sin x}+C,\ x\in[0,\pi/2)$$

2.

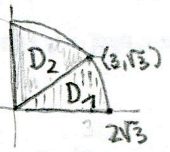


I NAČIN: $V_F=\pi\int_0^1 x^2(y)dy=\pi\int_0^1(1-\sqrt{1-y})^2dy=\frac{\pi}{6}$

II NAČIN: $V_F=\pi-V_G=\pi-2\pi\int_0^1 x\,y(x)dx=\pi-2\pi\int_0^1(2x^2-x^3)dx=\frac{\pi}{6}$

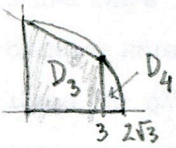
V_F i V_G SU ZAPREMINE TELA DOBIJENIH ROTACIJOM FIGURA F i G OKO y-OSE.

3. I NAČIN



$$\iint_D y\,dxdy=\iint_{D_1}y\,dxdy+\iint_{D_2}y\,dxdy=\int_0^{\pi/6}d\varphi\int_0^{2\sqrt3}\rho^2\sin\varphi\,d\rho+\int_0^3dx\int_{x/\sqrt3}^{\frac{6-x}{\sqrt3}}y\,dy=8\sqrt3-3$$

II NAČIN



$$\iint_D y\,dxdy=\iint_{D_3}y\,dxdy+\iint_{D_4}y\,dxdy=\int_0^3dx\int_0^{-\frac{\sqrt3}{3}x+2\sqrt3}y\,dy+\int_3^{2\sqrt3}dx\int_0^{\sqrt{12-x^2}}y\,dy=8\sqrt3-3$$

II GRUPA

1. AKO JE $e^x=t$ $(x\in(-\infty,\ln2)$ ILI $x\in(\ln2,+\infty))$, ONDA JE $\int\frac{5e^xdx}{e^{4x}-3e^{2x}-4}=\int\frac{5dt}{(t^2-4)(t^2+1)}$ $\Big(t\in($ ILI $t\in($

KAKO JE $\frac{5}{(t^2-4)(t^2+1)}=\frac{t^2+1-(t^2-4)}{(t^2-4)(t^2+1)}=\frac{1}{t^2-4}-\frac{1}{t^2+1}$, TO JE $\int\frac{5e^xdx}{e^{4x}-3e^{2x}-4}=\frac14\ln\frac{e^x-2}{e^x+2}-\arctan e^x+C$ ZA X

ODNOSNO $\int\frac{5e^xdx}{e^{4x}-3e^{2x}-4}=\frac14\ln\frac{2-e^x}{e^x+2}-\arctan e^x+C$ ZA $x<\ln2$.

2. POŠTO JE $f:x\mapsto\frac{1}{a+x^2}$ PARNA, DOVOLJNO JE ISPITATI KONVERGENCIJU INTEGRALA $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{a+x^2}$.

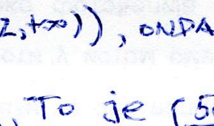
ZA $a=0$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$, PA JE ~~I(a)~~ $\int_0^1 f(x)dx$ DIVERGENTAN

ZA $a>0$, $f(x)\sim\frac{1}{x^2}$ $(x\to+\infty)$, PA JE $\int_0^\infty f(x)dx$ KONV., A TIME I $I(a)$.

ZA $a<0$, $f(x)\sim\frac{1}{2b}\cdot\frac{1}{x-b}$ $(x\to b)$ GDE JE $a=-b^2$, PA JE $\int_b^{b+1}f(x)dx$ DIVERGENTAN

PREMA TOME, $A=(0,+\infty)$. ZA $a\in A$ JE $I(a)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{a+x^2}=\frac{1}{\sqrt a}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d(x/\sqrt a)}{1+(\frac{x}{\sqrt a})^2}=\frac{1}{\sqrt a}\arctan\frac{x}{\sqrt a}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=$

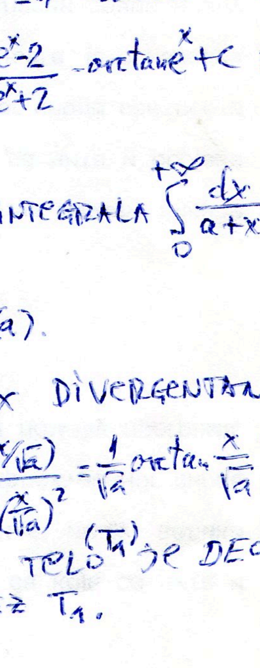
3. POSTOJE DVA TELA OGRANIČENA DATIM POVRŠIMA. JEDNO TELO (T_1) JE DEO VAL IZMEĐU $z=0$ I $z=9-x^2-y^2$, A DRUGO (T_2) JE DEO PARABOLOIDA (P) BEZ T_1.



$$V_{T_1}=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2\sin\varphi}(9-\rho^2)\rho\,d\rho=\frac{15\pi}{2}$$

$$V_P=4\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^3\rho(9-\rho^2)d\rho=\frac{81}{2}\pi$$

$$V_{T_2}=V_P-V_{T_1}=33\pi\quad\text{ili}\quad V_{T_2}=\frac{V_P}{2}+2\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_{2\sin\varphi}^3(9-\rho^2)\rho\,d\rho$$



Dragan Đorić

МАТЕМАТИКА 2

Други колоквијум (4.7.1997) - Група 1

1. Израчунати $\int \frac{x \ln x}{(x^2-1)^{3/2}} dx$.

Решење: Парцијалном интеграцијом са $u = \ln x$ и $dv = \frac{x dx}{(x^2-1)^{3/2}}$ имамо да је

$$v = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-1)}{(x^2-1)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad I = \int \frac{x \ln x}{(x^2-1)^{3/2}} dx = -\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}} + J,$$

где је $J = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. Када у интегралу J уведемо смену $x = 1/t$, добијамо

$$J = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + C = -\arcsin t + A = -\arcsin \frac{1}{x} + C.$$

Према томе,

$$I = -\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}} - \arcsin \frac{1}{x} + C.$$

2. Нека је $I(a,b) = \int_0^1 x^a (\ln x)^b dx$.

(1) Одредити скуп вредности a и b за које интеграл $I(a,b)$ конвергира.

(2) Израчунати $I(-1/2, 3)$.

Решење: (1) Како за $\varepsilon > 0$ важи $\ln x = o(1/x^{\varepsilon})$ за $x \to 0_+$, то је

$$x^a(\ln x)^b = o\left(\frac{1}{x^{b\varepsilon - a}}\right), \quad x \to 0_+.$$

Пошто ово важи за свако $\varepsilon > 0$, дати интеграл конвергира за $-a < 1$, односно за $a > -1$.

Када $x \to 1_-$, имамо да је $x^a(\ln x)^b \sim (x-1)^b$, што значи да интеграл конвергира за $b > -1$.

Према томе, интеграл $I(a,b)$ конвергира за $(a,b) \in (-1,+\infty)^2$.

(2) Парцијалном интеграцијом са $u = \ln^3 x$ и $dv = dx/\sqrt{x}$ имамо да је

$$I(-1/2,3) = \int_0^1 \frac{\ln^3 x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}\ln^3 x \Big|_0^1 - 6\int_0^1 \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} dx = -6\int_0^1 \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} dx.$$

Када још два пута применимо парцијалну интеграцију, добијамо да је $I(-1/2,3) = -96$.

3. Израчунати запремину тела ограниченог површима:

$$z = 0, \quad az = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 = 2ax \ (a > 0).$$

Решење: Ако је $\mathcal{D} = \{(x,y) \ : \ (x-a)^2 + y^2 = a^2\}$, тада је $V = \frac{1}{a}\iint_{\mathcal{D}} (x^2+y^2) dx dy$. Сменом $x = a + \rho\cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$ област $\mathcal{D}$ пресликава се у област $\mathcal{D}_1 = [0, 2\pi] \times [0, a]$, па је

$$V = \frac{1}{a}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a (\rho^3 + 2a\rho^2\cos\varphi + a^2\rho) d\rho = \frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a^4}{4} + \frac{2}{3}a^4\cos\varphi + \frac{a^4}{2}\right) d\varphi = \frac{3}{2}a^3\pi.$$

Друго решење. За поларне координате $x = r\cos\theta$ и $y = r\sin\theta$ имамо да је $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ и $r \in [0, 2a\cos\theta]$, па је

$$\begin{aligned}
V =& \frac{1}{a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} r^3 dr = \frac{1}{a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^{2a\cos\theta} \\
=& 4a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta d\theta = 8a^3 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta \\
=& 2a^3 \int_0^{\pi/2} (1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta) d\theta \\
=& 2a^3(\theta + \sin 2\theta)\Big|_0^{\pi/2} + a^3 \int_0^{\pi/2} (1+\cos 4\theta) d\theta \\
=& 2a^3\frac{\pi}{2} + a^3\left(\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta\right)\Big|_0^{\pi/2} \\
=& \frac{3}{2}a^3\pi.
\end{aligned}$$

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Други колоквијум (30.5.1998) - Група 1

1. Израчунати $\displaystyle\int x\sin\sqrt{x}\,dx$.

Решење: Дати интеграл се сменом $x = t^2$ своди на интеграл $\int 2t^3\sin t dt$. После једне парцијалне интеграције, узимајући да је $u = t^3$, $dv = \sin t dt$, добија се

$$I = -2t^3\cos t + 6I_1,\ \text{где је}\ I_1 = \int t^2\cos t dt$$

После две парцијалне интеграције се добија

$$I_1 = t^2\sin t + 2t\cos t - 2\sin t,$$

па је

$$I = -2t^3\cos t + 6t^2\sin t + 12t\cos t - 12\sin t + C,\ \text{где је}\ t = \sqrt{x}.$$

2. Израчунати површину фигуре ограничене линијама

$$y = 0,\ x = \frac{1}{2},\ x = 2,\ y = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}.$$

Решење: Обзиром да је $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} > 0$ за $x \in \left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$, то је

$$P = \int_{1/2}^{2}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}dx.$$

Имајући у виду да је

$$\left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)} = \begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2}, & \text{за } |x| < 1 \\ -\dfrac{2}{1+x^2}, & \text{за } |x| > 1 \end{cases},$$

дати интеграл представљамо у облику збира $I_1 + I_2$, где је

$$I_1 = \int_{1/2}^{1}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}dx,\ I_2 = \int_{1}^{2}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}dx.$$

Парцијалном интеграцијом се добија

$$I_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5} - \ln 2 + \ln\frac{5}{4},\ I_2 = 2\arcsin\frac{4}{5} - \frac{\pi}{2} + \ln 5 - \ln 2,$$

па је

$$P = I_1 + I_2 = \arcsin\frac{4}{5} + 2\ln\frac{5}{4}.$$

3. Израчунати запремину тела ограниченог површима

$$3z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = 6x,\ \sqrt{3}x - y = 0,\ \left(0 \le y \le \frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

Решење: Тражена запремина је

$$V = \frac{1}{3}\iint_D (x^2+y^2)dxdy,$$

где је D област ограничена линијама $x^2+y^2=6x$ и $y=\sqrt{3}x$, $0 \le y \le 3\sqrt{3}/2$. Преласком на поларне координате $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$, област D се пресликава у област

$$D' = \left\{(\varphi,\rho) : \frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \rho \le 6\cos\varphi\right\},$$

па је

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}\int_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{6\cos\varphi} \rho^2 \cdot \rho d\rho \\
&= 108\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^4\varphi d\varphi \\
&= 27\int_{\pi/3}^{\pi/2} (1+\cos 2\varphi)^2 d\varphi \\
&= 27\int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(1+2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi \\
&= \frac{27(4\pi - 7\sqrt{3})}{16}.
\end{aligned}$$

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Други колоквијум (27.5.2000) - Група 1

1. Израчунати $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \arctan(\cos^2 x) dx$.

Решење: Дати интеграл се сменом $t = \cos^2 x$ своди на интеграл $I = \int_0^1 \arctan t dt$. Даље се парцијалном интеграцијом добија

$$I = t \arctan t|_0^1 - \int_0^1 \frac{tdt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

2. Израчунати дужину лука криве задане параметарски:

$$x = \frac{t^2}{2},\ y = \ln t,\ 1 \le t \le 2.$$

Решење: Према формули за дужину лука је

$$l = \int_1^2 \sqrt{{x'_t}^2 + {y'_t}^2} dt = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+t^4}}{t} dt.$$

Увођењем смене $t^4 + 1 = u^2$ добија се $\frac{2dt}{t} = \frac{udu}{t^4}$, односно $\frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{udu}{u^2-1}$, па је

$$\begin{aligned}
l &= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{17}} \frac{u^2 du}{u^2-1} \\
&= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{17}} \left(1 + \frac{1}{u^2-1}\right) du \\
&= \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{17}} \\
&= \frac{1}{2}(\sqrt{17} + 2\ln 2 - \ln(\sqrt{17}+1) - \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)).
\end{aligned}$$

3. Израчунати $\iint_{\mathcal{D}} \frac{xy\, dxdy}{\sqrt{9x^2+4y^2}}$, где је $\mathcal{D} = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,\ x \ge 0, y \ge 0\right\}$.

Решење: Увођењем уопштених поларних координата $x = 2\varrho\cos\varphi$, $y = 3\varrho\sin\varphi$, област D се пресликава у област

$$D' = \left\{(\varphi, \varrho) : 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \varrho \le 1\right\},$$

па је

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \frac{6\varrho^2 \cos\varphi \sin\varphi}{6\varrho} \cdot 6\varrho d\varrho \\
&= 3\int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi d\varphi \cdot \frac{\varrho^3}{3}\Big|_0^1 \\
&= -\frac{1}{2}\cos 2\varphi\Big|_0^{\pi/2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Други колоквијум (27.5.2000) - Група 2

1. Израчунати $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1}$.

Решење: Користећи идентитете $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ и $4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \sin^2 2\alpha$, подинтегрална функција се трансформише у $\frac{2}{(2-\sin 2x)(2+\sin 2x)}$, па је

$$I = 2 \int \frac{dx}{(2-\sin 2x)(2+\sin 2x)}.$$

Ако је $t = \tan x$, онда је $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, па је

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{(t^2+1)dt}{(t^2+t+1)(t^2-t+1)}.$$

Из разлагања

$$\frac{t^2+1}{(t^2+t+1)(t^2-t+1)} = \frac{At+B}{t^2+t+1} + \frac{Ct+D}{t^2-t+1}$$

добијамо да је $B = D = \frac{1}{2}$, $A = C = 0$, па је $I = \frac{1}{4}(I_1 + I_2)$, где је

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+t+1}, \quad I_2 = \int \frac{dt}{t^2-t+1}.$$

Даље је

$$I_1 = \int \frac{dt}{(t+1/2)^2 + 3/4} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C_1,$$

$$I_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C_2,$$

па је

$$I = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right) + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{\sqrt{3}t}{1-t^2} + C,$$

где је $t = \tan x$.

Примедба: У сређивању резултата коришћена је формула

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}.$$

2. Одредити све вредности реалног параметра α за које интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin^4 x - e^x + 1 + x}{x^\alpha} dx$$

конвергира.

Решење: Ако $x \to 0+$, онда је

$$\frac{\sin^2 x - e^x + 1 + x}{x^\alpha} \sim \frac{x^2 - 1 - x + 1 + x}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-2}}.$$

Интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-2}}$ конвергира ако и само ако је $\alpha - 2 < 1$, тј. ако и само ако је $\alpha < 3$. За $\alpha \geq 3$ интеграл дивергира.

3. Израчунати запремину тела ограниченог површима

$$z = 1 - x^2 - y^2,\ z = x^2 + y^2 + 1,\ x^2 + y^2 = 1.$$

Решење: Тражена запремина се може израчунати помоћу двојног интеграла.

$$V = \iint_D [1 + x^2 + y^2 - (1 - x^2 - y^2)] dxdy = 2 \iint_D (x^2 + y^2) dxdy,$$

где је $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Увођењем поларних координата $x = \varrho \cos \varphi,\ y = \varrho \sin \varphi$, добија се

$$V = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \varrho^2 \cdot \varrho d\varrho = \pi.$$

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Други колоквијум (27.5.2000) - Група 3

1. Израчунати $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x + \sin x}{\sin x + \cos x + 1} dx.$

Решење: Ако је I дати интеграл, онда сменом $x = \pi/2 - t$ добијамо

$$I = \int_{\pi/2}^{0} \frac{\sin^2(\pi/2 - t) + \sin(\pi/2 - t)}{\sin(\pi/2 - t) + \cos(\pi/2 - t)}(-dt) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t + \cos t}{\cos t + \sin t + 1} dt,$$

па је $2I = \int_0^1 dx = \pi/2$. Према томе, $I = \pi/4$.

Друго решење. Сменом $\tan(x/2) = t$ добијамо

$$I = 2\int_0^1 \frac{t^2 + t}{(1 + t^2)^2} dt = 2\int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} + 2\int_0^1 \frac{t - 1}{(t^2 + 1)^2} dt = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

2. Испитати конвергенцију интеграла $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sinh x}$.

Решење: Нека је $f(x) = x/\sinh x$, $g(x) = xe^{-x}$ и нека је G примитивна функција функције g. Како $f(x) \to 1/2$, $(x \to 0+)$ и $f(x) \to 0$, $(x \to +\infty)$, то је f ограничена функција на $(0, +\infty)$. Из $f(x) \sim 2g(x)$, $(x \to +\infty)$ следи да дати интеграл конвергира ако и само ако конвергира $\int_0^{+\infty} g(x)dx$. Међутим, $G(x) = -xe^{-x} - e^{-x}$, одакле следи да $G(x) \to 0$, $(x \to +\infty)$, што значи да је $\int_0^{+\infty} g(x)dx$ конвергентан. Према томе, конвергентан је и дати интеграл.

3. Израчунати запремину тела ограниченог површима

$$x^2 + y^2 = 2x,\ \ x^2 + y^2 = 2y,\ \ z = 0,\ \ z = x + y.$$

Решење: Ако је D пресек кругова $(x-1)^2 + y^2 \le 1$ и $x^2 + (y-1)^2 \le 1$, онда је

$$V = \iint_D (x + y) dx dy = 2\int_0^{\pi/4} (\cos\varphi + \sin\varphi) d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} \varrho^2 d\varrho = \frac{16}{3}(I + J),$$

где је

$$I = \int_0^{\pi/4} \cos\varphi \sin^3\varphi d\varphi = \int_0^{\pi/4} \sin^3\varphi d\sin\varphi) = \frac{1}{16},$$

$$J = \int_0^{\pi/4} \sin^4\varphi d\varphi = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos 4\varphi - \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) d\varphi = \frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}.$$

Према томе,

$$V = \frac{16}{3}\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{3}{16}\right) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Други колоквијум (27.5.2000) - Група 4

1. Израчунати $\displaystyle\int \frac{x\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

Решење: Применом методе парцијалне интеграције, за

$$u=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),\ dv=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}},$$

добија се

$$I=\sqrt{x^2+1}\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\int dx=\sqrt{x^2+1}\ln(x+\sqrt{x^2+1})-x+C.$$

2. Испитати конвергенцију интеграла

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{1+2\sqrt{x}+x^2}dx.$$

Решење: На основу низа неједнакости

$$\frac{\sqrt{x+1}}{1+2\sqrt{x}+x^2}<\frac{\sqrt{x+1}}{x^2}\leq\frac{\sqrt{x+x}}{x^2}=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{x^{3/2}},$$

које важе за $x\geq 1$ закључујемо да дати интеграл конвергира.

3. Израчунати површину ограничену линијама

$$x^2+y^2=2ax,\ x^2+y^2=2bx,\ y=x,\ y=0,\quad (0<a<b).$$

Решење: Имамо да је $P=\displaystyle\iint_D dxdy$, где је D област ограничена датим линијама. Преласком на поларне координате $x=\varrho\cos\varphi$, $y=\varrho\sin\varphi$ добија се

$$\begin{aligned}
P &= \int_0^{\pi/4}d\varphi\int_{2a\cos\varphi}^{2b\cos\varphi}\varrho d\varrho\\
&= 2(b^2-a^2)\int_0^{\pi/4}\cos^2\varphi d\varphi\\
&= (b^2-a^2)\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/4}\\
&= \frac{(b^2-a^2)(\pi+2)}{4}.
\end{aligned}$$

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Други колоквијум (26.5.2001) - Група 2

1. Израчунати $\int \frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x(1+\cos^2 x)}dx$.

Решење: Сменом $\cos x = t$ имамо

$$I = \int \frac{t-1}{t(1+t^2)}dt = \int \frac{tdt}{t(1+t^2)} - \int \frac{1+t^2-t^2}{t(1+t^2)}dt.$$

Дакле,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dt}{1+t^2} - \int \frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{1+t^2} \\ &= \arctan t - \ln|t| + \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C \\ &= \arctan(\cos x) - \ln|\cos x| + \frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x) + C. \end{aligned}$$

2. Израчунати $\int_{-1}^{1} \frac{e^x dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$.

Решење: Ако је $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ дати интеграл, тада је $I = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = I_1 + I_2$. Сменом $x = -t$ у интегралу I_1 добијамо

$$\begin{aligned} I &= -\int_{1}^{0} \frac{e^{-t}dt}{(e^{-t}+1)(t^2+1)} + I_2 \\ &= \int_{0}^{1} \frac{dt}{(1+e^t)(t^2+1)} + \int_{0}^{1} \frac{e^t dt}{(e^t+1)(t^2+1)} \\ &= \int_{0}^{1} \frac{1+e^t}{1+e^t} \cdot \frac{dt}{t^2+1} \\ &= \int_{0}^{1} \frac{dt}{t^2+1} \\ &= \pi/4. \end{aligned}$$

3. Израчунати запремину тела ограниченог површима: $x^2+y^2-2x=0$, $2z = x^2+y^2$ и $z=0$.

Решење: $V = \frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)dxdy$, где је D унутрашњост круга $x^2+y^2-2x=0$.

Користећи поларне координате имамо да је

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^3 d\rho \\
&= \frac{1}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2\cos\varphi)^4 d\varphi \\
&= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 \, d\varphi \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2\varphi d\varphi + \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 2\varphi d\varphi \\
&= \frac{\pi}{2} + 0 + \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 4\varphi}{2} d\varphi \\
&= \frac{3}{4}\pi.
\end{aligned}
$$

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Други колоквијум (1.6.2002) - Група 2

1. Одредити везу између I_n и I_{n-2}, $(n \in N,\ n > 2)$ ако је

$$I_n = \int arcsin^n x\, dx.$$

Решење: Парцијалном интеграцијом са $u = \arcsin^n x$ и $dx = dv$ добијамо

$$I_n = x\arcsin^n x - n\int \frac{x\arcsin^{n-1} x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin^n x - n\cdot J.$$

Ако на интеграл J такође применимо парцијалну интеграцију са $u = \arcsin^{n-1} x$ и $dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ добијамо

$$I_n = x\arcsin^n x + n\sqrt{1-x^2}\arcsin^{n-1} x - n(n-1)I_{n-2}.$$

2. Израчунати дужину лука криве дате са $x(t) = 2\sqrt{2}\sqrt{1-t^2}$, $y(t) = t\sqrt{1-t^2}$ за $0 \le t \le 1$.

Решење: Како је $x'(t) = -2\sqrt{2}\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ и $y'(t) = \sqrt{1-t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}$, то је

$$x'^2 + y'^2 = \frac{(2t^2+1)^2}{1-t^2}, \quad \sqrt{x'^2+y'^2} = \frac{2t^2+1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Према формули за дужину лука криве која је дата параметарски имамо да је

$$l = \int_0^1 \frac{2t^2+1}{\sqrt{1-t^2}}dt = -2\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt + 3\arcsin t\Big|_0^1 = -2I + \frac{3}{2}\pi,$$

где је

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u du = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2u}{2}du = \frac{1}{2}u\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{4}\sin 2u\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Према томе, $l = -2\cdot\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3}{2}\pi = \pi$.

3. Израчунати $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} x\cdot\sin|y-x^2|dxdy$, где је $\mathcal{D} = \{(x,y)\ :\ 0 \le x \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0 \le y \le \pi\}$.

Решење: Нека је $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, где је

$$\mathcal{D}_1 = \{(x,y)\ :\ 0 \le x \le \sqrt{\frac{\pi}{2}},\ 0 \le y \le x^2\}, \quad \mathcal{D}_2 = \{(x,y)\ :\ 0 \le x \le \sqrt{\frac{\pi}{2}},\ x^2 \le y \le \pi\}.$$

Како је

$$|y-x^2| = \begin{cases} y-x^2, & y \ge x^2 \\ x^2-y, & y < x^2 \end{cases} = \begin{cases} y-x^2, & (x,y) \in \mathcal{D}_1 \\ x^2-y, & (x,y) \in \mathcal{D}_2 \end{cases}$$

то је

$$I = \iint_{\mathcal{D}_1} f(x,y)dxdy + \iint_{\mathcal{D}_2} f(x,y)dxdy = I_1 + I_2,$$

где је

$$I_1 = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x dx \int_{x^2}^{\pi} \sin(y - x^2) dy = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x(\cos x^2 + 1) dx = \frac{1}{2} \sin x^2 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{\pi/2}} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$I_2 = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x dx \int_0^{x^2} \sin(x^2 - y) dy = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x(1 - \cos x^2) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \sin x^2 \Big|_0^{\sqrt{\pi/2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Дакле, $I = I_1 + I_2 = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Други колоквијум (7.6.2003) - Група 4

1. Израчунати $\displaystyle\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$.

Решење: Сменом $\cot x = t$ имамо

$$I = \int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \int \frac{1}{1+\cot^3 x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int \frac{dt}{1+t^3}.$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+t^3} &= \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1}\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+t} + \frac{1}{3}\int \frac{2-t}{t^2-t+1}dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I &= -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{1+t} + \frac{1}{3}\int \frac{t-2}{t^2-t+1}dt\\
&= -\frac{1}{3}\ln|1+t| + \frac{1}{6}\int \frac{2t-4}{t^2-t+1}dt\\
&= -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\int \frac{2t-1}{t^2-t+1}dt - \frac{1}{6}\int \frac{3dt}{t^2-t+1}\\
&= -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-t+1}\\
&= -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t-1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2}\\
&= -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t-1/2}{\sqrt{3}/2} + C\\
&= -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C\\
&= -\frac{1}{3}\ln|\cot x+1| + \frac{1}{6}\ln(\cot^2 x-\cot x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\cot x-1}{\sqrt{3}} + C\end{aligned}$$

Напомена. Ако се уведе смена $\tan x = t$, онда је $I = \displaystyle\int \frac{tdt}{1+t^3}$ и

$$\frac{t}{1+t^3} = \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1}, \quad A = -\frac{1}{3},\ B = C = \frac{1}{3}.$$

2. Израчунати дужину лука криве $y = \sqrt{x^2-48} + 4\sqrt{6}\ln(x+\sqrt{x^2-48})$ за $7 \le x \le 8$.

Решење: Како је

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-48}} + \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{x^2-48}} = \frac{x_4\sqrt{6}}{\sqrt{x^2-48}}, \quad \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{2}\cdot\frac{x+2\sqrt{6}}{\sqrt{x^2-48}},$$

то је

$$\begin{aligned}l &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_7^8 \frac{d(x^2-48)}{\sqrt{x^2-48}} + \sqrt{2}\cdot 2\sqrt{6}\int_7^8 \frac{dx}{\sqrt{x^2-(4\sqrt{3})^2}}\\
&= \sqrt{2}\sqrt{x^2-48}\,\Big|_7^8 + 4\sqrt{3}\ln(x+\sqrt{x^2-48})\,\Big|_7^8\\
&= 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3}\ln\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

3. Израчунати запремину тела ограниченог површима: $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 2x + y$ и $z = 0$ за $y \geq 0$.

Решење: Користећи поларне координате ($x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$) имамо да је

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi/2} (2\cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^2 d\rho \\ &= \frac{16}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^4\varphi d\varphi - \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^3\varphi d(\cos\varphi) \\ &= \frac{16}{3}\cdot\frac{3\pi}{16} - \frac{8}{3}\cdot\frac{-1}{4} \\ &= \pi + 2/3. \end{aligned}$$

Друго решење. Ако је $x = 1 + r\cos\theta$ и $y = r\sin\theta$, тада је

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 (2 + 2r\cos\theta + r\sin\theta) r dr \\ &= \int_0^{\pi} \left(1 + \frac{2}{3}\cos\theta + \frac{1}{3}\sin\theta\right) d\theta \\ &= \pi + 2/3. \end{aligned}$$

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Други колоквијум (5.6.2004) - Група 4

1. Израчунати $\displaystyle\int \frac{\sin x dx}{\cos x + \cos^2 x + \cos^3 x}$

Решење: Сменом $\cos x = t$ имамо $I = -\displaystyle\int \frac{dt}{t + t^2 + t^3}$

$$\frac{1}{t(1+t+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{1+t+t^2} = \frac{1}{t} - \frac{t+1}{1+t+t^2}$$

$$\begin{aligned}
I &= -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{t+1}{t^2+t+1} dt \\
&= -\ln|t| + \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t+1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} \\
&= -\ln|t| + \frac{1}{2}\ln(t^2+t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t+1/2}{\sqrt{3}/2} + C \\
&= -\ln|\cos x| + \frac{1}{2}\ln(\cos^2 x + \cos x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\cos x + 1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

2. Израчунати површину криволинијског трапеза одређеног графиком функције $f : x \mapsto e^{-2x}\cos^2 x$ за $0 \le x \le +\infty$.

Решење: $P = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}\cos^2 x dx$. Парцијалном интеграцијом $(u = \cos^2 x,\ dv = e^{-2x}dx)$ добијамо

$$P = -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos^2 x\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2x}\sin 2x dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}J.$$

Применом парцијалне интеграција на интеграл J имамо да је

$$\begin{aligned}
J &= -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin 2x\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-2x}\cos 2x \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-2x}\cos 2x \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos 2x\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-2x}\sin 2x dx \\
&= \frac{1}{2} - J,
\end{aligned}$$

па је $J = 1/4$. Према томе, $P = 3/8$.

3. Израчунати $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$ ако је D област ограничена кривим линијама $x^2+y^2 = 4x$, $x^2+y^2 = 8x$, $y = 0$ и $y = x$.

Решење: Трансформацијом у поларне координате $(x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi)$ област интеграције D пресликава се у област

$$G = \{(\varphi, \rho)\ :\ 4\cos\varphi \le \rho \le 8\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi/4\},$$

при чему је Јакобијан једнак ρ.

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2} &= \iint_G \frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho^4} \\
&= \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} \frac{d\rho}{\rho^3} \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\rho^2}\Big|_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} \right) d\varphi \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{64\cos^2\varphi} - \frac{1}{16\cos^2\varphi} \right) d\varphi \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{64} - \frac{1}{16} \right) \int_0^{\pi/4} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} \\
&= \frac{3}{128}\tan\varphi\Big|_0^{\pi/4} \\
&= \frac{3}{128}.
\end{aligned}$$

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Други колоквијум (12.6.2006) - Група 1

1. Израчунати $\int \frac{(9\sin x + 2)\cos x}{\sin^2 x + 6\sin x + 58} dx.$

Решење: Сменом $\sin x = t$ имамо

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{9t+2}{t^2+6t+58}dt = \frac{9}{2}\int \frac{2t+4/9}{t^2+6t+58}dt \\ &= \frac{9}{2}\int \frac{2t+6}{t^2+6t+58}dt + \frac{9}{2}\int \frac{4/9-6}{(t+3)^2+7^2}dt \\ &= \frac{9}{2}\ln(t^2+6t+58) - \frac{25}{7}\arctan\frac{t+3}{7} + C \\ &= \frac{9}{2}\ln(\sin^2 x + 6\sin x + 8) - \frac{25}{7}\arctan\frac{\sin x + 3}{7} + C. \end{aligned}$$

2. Израчунати дужину лука криве

$$y = \sqrt{x^2-48} + 4\sqrt{6}\ln(x + \sqrt{x^2-48}), \quad 7 \le x \le 8.$$

Решење: Како је

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-48}} + \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{x^2-48}} = \frac{x+4\sqrt{6}}{\sqrt{x^2-48}}, \quad \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{2}\cdot\frac{x+2\sqrt{6}}{\sqrt{x^2-48}},$$

то је

$$\begin{aligned} l &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_7^8 \frac{d(x^2-48)}{\sqrt{x^2-48}} + \sqrt{2}\cdot 2\sqrt{6}\int_7^8 \frac{dx}{\sqrt{x^2-(4\sqrt{3})^2}} \\ &= \sqrt{2}\sqrt{x^2-48}\Big|_7^8 + 4\sqrt{3}\ln(x+\sqrt{x^2-48})\Big|_7^8 \\ &= 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3}\ln\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

3. Израчунати $\iint_D \ln(x^2+y^2)dxdy$ ако је $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ e^2 \le x^2+y^2 \le e^4\right\}.$

Решење: Трансформацијом у поларне координате ($x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$) област интеграције D пресликава се у област

$$G = \{(\varphi,\rho) \ : \ 0 \le \varphi \le 2\pi, \ e^2 \le \rho \le e^2\},$$

при чему је Јакобијан једнак ρ.

$$\begin{aligned} \iint_D ln(x^2+y^2)dxdy &= \iint_G \rho^2\cdot\rho \, d\rho d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{1}{2}\int_e^{e^2} \ln\rho^2 \, d(\rho^2) \\ &= \pi\left(\rho^2\ln\rho^2 - \rho^2\Big|_e^{e^2}\right) \\ &= (3e^4 - e^2)\pi. \end{aligned}$$

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Други колоквијум (9.6.2007) - Група 2

1. Израчунати $\int \frac{4x^2+3x+2}{x^3-8}dx$.

Решење: Из једнакости

$$\frac{4x^2+3x+2}{x^3-8} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

добијамо $A = B = 2$ и $C = 3$.

$$\begin{aligned} I &= 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}dx + \int \frac{dx}{x^2+2x+4} \\ &= 2\ln|x-2| + \ln(x^2+2x+4) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

2. Израчунати површину површи настале ротацијом око x-осе криве $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ за $-2 \leq x \leq 2$.

Решење: Како је $\sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{2}(e^x+e^{-x}) = y$, то је

$$P = 2\pi \int_{-2}^{2} y^2 dx = \frac{\pi}{2}\int_{2}^{2}(e^x+e^{-x})^2 dx = \frac{\pi}{2}(e^4 - e^{-4} + 8).$$

3. Израчунати $\iint_{\mathcal{D}} \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, где је $\mathcal{D} = \{(x,y)\ :\ 4 \leq x^2+y^2 \leq \frac{\pi^2}{4},\ x \geq 0,\ y \leq 0\}$.

Решење: Трансформацијом у поларне координате $(x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi)$ област интеграције D пресликава се у правоугаоник $G : [-\pi/2, 0] \times [0, \pi/2]$, при чему је Јакобијан једнак ρ.

$$\begin{aligned} \iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy &= \iint_G \rho\sin\rho d\rho d\varphi \\ &= \int_{-\pi/2}^{0} \varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \rho\sin\rho d\rho \\ &= \varphi\Big|_{-\pi/2}^{0} \cdot 1 \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Други колоквијум (7.6.2008) - Група 3

1. Израчунати $\int \frac{3\sin 2x}{\cos^2 x+1}dx$

Решење: Сменом $\cos x = t$ имамо

$$I = 6\int \frac{\sin x \cos x}{\cos^3 x+1}dx = -6\int \frac{tdt}{t^3+1} = -6J.$$

Из једнакости

$$\frac{t}{t^3+1} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1}$$

следи

$$t = A(t^2-t+1) + (Bt+C)(t+1).$$

За $t=-1$ је $-1=3A$, па је $A=-1/3$.
За $t=0$ је $0=A+C$, па је $C=1/3$.
За $t=1$ је $1=-1/3+(B+1/3)\cdot 2$, па је $B=1/3$.

$$\begin{aligned} J &= -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{3}\int \frac{t+1}{t^2-t+1}dt \\ &= -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2t-1}{t^2-t+1}dt + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2-t+1} \\ &= -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2} \\ &= -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t-1/2}{\sqrt{3}/2} + C. \end{aligned}$$

Према томе,

$$\begin{aligned} I &= 2\ln|\cos x+1| - \ln(\cos^2 x - \cos x + 1) - \frac{6}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\cos x-1}{\sqrt{3}} + C \\ &= \ln\frac{(\cos x+1)^2}{\cos^2 x-\cos x+1} - 2\sqrt{3}\arctan\frac{2\cos x-1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

2. Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око x-осе фигуре ограничене кривом $y=\sqrt{\ln(x+\sqrt{x^2+1}}$ и правама $y=0$, $x=0$ и $x=2$.

Решење: $V = \pi\int_0^2 \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx = \pi I$. Ако на интеграл I применимо парцијалну интеграцију са $u=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ и $dv=dx$, добијамо

$$du = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}\,x = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}, \quad v=x,$$

па је

$$\begin{aligned} I &= x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= x\ln(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}\Big|_0^2 \\ &= 2\ln(2+\sqrt{5}) - \sqrt{5} - (0-1) \\ &= 2\ln(2+\sqrt{5}) + 1 - \sqrt{5}. \end{aligned}$$

3. Израчунати $\iint_{\mathcal{D}} x\sin(3x-y)dxdy$, где је $\mathcal{D}$ паралелограм ограничен правама: $y=3x$, $y=3x-\dfrac{\pi}{2}$, $y=-x-1$, $y=-x+3$.

Решење: Трансформацијом $u=y-3x$, $v=x+y$ област интеграције D пресликава се у правоугаоник $G:[-\pi/2,0]\times[-1,3]$, при чему је

$$x=-\frac{1}{4}u+\frac{1}{4}v, \quad y=\frac{1}{4}u+\frac{3}{4}v, \quad J=\begin{vmatrix}-1/4 & 1/4\\ 1/4 & 3/4\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}.$$

Ако је I дати интеграл, тада је

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{0}\int_{-1}^{3}\left(-\frac{1}{4}u+\frac{1}{4}v\right)\sin(-u)dudv\\
&= \frac{1}{16}\int_{-\pi/2}^{0}\sin u du\ \int_{-1}^{3}(u-v)dv\\
&= \frac{1}{16}\int_{-\pi/2}^{0}u\sin u du\cdot\int_{-1}^{3}dv-\frac{1}{16}\int_{-\pi/2}^{0}\sin u du\cdot\int_{-1}^{3}v dv\\
&= \frac{1}{16}\cdot 1\cdot v\Big|_{-1}^{3}-\frac{1}{16}\cdot(-1)\cdot\frac{v^2}{2}\Big|_{1}^{3}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Други колоквијум (7.6.2008) - Група 5

1. Израчунати $\int \frac{2\sin^2 x}{1+2\cos^2 x}dx$

Решење: Ако је $\tan x = t$, тада је $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Заменом ових израза у датом интегралу добијамо $I = 2\int \frac{t^2 dt}{(t^2+1)(t^2+3)}$.

Из једнакости

$$\frac{t^2}{(t^2+1)(t^2+3)} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{t^2+3}$$

следи

$$t^2 = (At+B)(t^2+3) + (Ct+D)(t^2+1).$$

За $t = i$ је $-1 = (Ai+B)\cdot 2$, па је $A = 0$ и $B = -1/2$.
За $t = \sqrt{3}i$ је $-3 = (C\sqrt{3}i + D)\cdot(-2)$, па је $C = 0$ и $D = 3/2$.

Према томе,

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{dt}{t^2+1} + 3\int \frac{dt}{t^2+\sqrt{3}^2} \\ &= -\arctan t + \frac{3}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}} + C \\ &= -\arctan(\tan x) + \sqrt{3}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{3}} + C \\ &= = x + \sqrt{3}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

2. Израчунати површину површи настале ротацијом око x-осе криве $x = 1 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2$ за $0 \le y \le 1$.

Решење: Из дате везе x и y имамо да је $y = 1 \pm 2\sqrt{x-1}$. Како је $P = 2\pi I$, где је

$$I = \int_1^{5/4} (1 - 2\sqrt{x-1})\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}dx = \int_1^{5/4} \sqrt{\frac{x}{x-1}}dx - 2\int_1^{5/4} \sqrt{x}dx = I_1 - 2I_2,$$

треба израчунати интеграле I_1 и I_2.

За I_1 сменом $x - 1 = t^2$ добијамо $I_1 = 2\int_0^{1/2} \sqrt{1+t^2}dt = 2J$, где је

$$J = t\sqrt{1+t^2}\,\Big|_0^{1/2} - \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{4}\sqrt{5} - J + \ln(t + \sqrt{1+t^2})\,\Big|_0^{1/2},$$

односно $2J = \frac{\sqrt{5}}{4} + \ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Заменом I_1 и $I_2 = \frac{5}{12}\sqrt{5} - \frac{2}{3}$ у I добијамо

$$P = 2\pi\left(-\frac{7}{12}\sqrt{5} + \ln\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{4}{3}\right).$$

3. Израчунати $\iint_{\mathcal{D}} (x+y)^2 e^{x^2-y^2}\,dxdy$, где је $\mathcal{D}$ паралелограм ограничен правама: $y=x$, $y=x+1$, $y=-x-1$, $y=-x+1$.

Решење: Трансформацијом $u=y-x$, $v=x+y$ област интеграције D пресликава се у правоугаоник $G:[0,1]\times[-1,1]$, при чему је Јакобијан једнак $1/2$. Према томе,

$$I=\frac{1}{2}\iint_G v^2 e^{-uv}dudv=\frac{1}{2}\int_0^1 du\int_{-1}^1 v^2 e^{-uv}dv=\frac{1}{2}J,$$

где је

$$J=\int_{-1}^1 v^2dv\left[-\frac{1}{v}e^{-uv}\Big|_0^1\right]=-\int_{-1}^1 ve^{-v}dv+\int_{-1}^1 vdv=\frac{2}{e}.$$

Дакле, $I=1/e$.

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Други колоквијум (23.5.2009) - Група 4

1. Израчунати $\int \frac{3e^{3x} - e^{2x} + 4e^{x}}{(e^{x}+1)(e^{2x} - 2e^{x} + 5)} dx.$

Решење: Сменом $e^x = t$ добијамо $I = \int \frac{3t^2 - t + 4}{(t+1)(t^2 - 2t + 5)} dt$

$\frac{3t^2 - t + 4}{(t+1)(t^2 - 2t + 5)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt + C}{t^2 - 2t + 5} = \frac{1}{t+1} + \frac{2t - 1}{t^2 - 2t + 5}$

$I = \ln|t+1| + \ln(t^2 02t + 5) + \frac{1}{2} \arctan \frac{t-1}{2} + C$

$I = \ln(e^x + 1) + \ln(e^{2x} - 2e^x + 5) + \frac{1}{2} \arctan \frac{e^x - 1}{2} + C$

2. Израчунати површину површи настале ротацијом око x-осе криве $y = x^2 - \frac{\ln x}{8}$ за $\sqrt{e} \leq x \leq e$.

Решење: Уочимо најпре да је $1 + y' = \left(2x + \frac{1}{8x}\right)^2$.

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_{\sqrt{e}}^{e} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx \\ &= 2\pi \int_{\sqrt{e}}^{e} \left(2x^3 + \frac{x}{8} - \frac{1}{4}x\ln x - \frac{1}{64} \cdot \frac{\ln x}{x}\right) dx \\ &= 2\pi \left(\frac{x^4}{2}\Big|_{\sqrt{e}}^{e} + \frac{x^2}{16}\Big|_{\sqrt{e}}^{e} - \frac{1}{4}J - \frac{1}{64}K\right) \end{aligned}$$

где је

$$J = \int_{\sqrt{e}}^{e} x \ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\Big|_{\sqrt{e}}^{e}, \quad K = \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}\ln^2 x \Big|_{\sqrt{e}}^{e}.$$

Заменом граница и сређивањем добијамо

$$P = \left(e^4 - e^2 - \frac{1}{8}e - \frac{3}{256}\right) \pi.$$

3. $\iint_{\mathcal{D}} (x - 2y)\sin(\pi(2x + y)) dxdy$, $\mathcal{D}$ - паралелограм ограничен правама: $y = \frac{x}{2} + 2$, $y = \frac{x}{2} + 3$, $y = -2x$, $y = -2x + \frac{1}{2}$.

Решење: Трансформацијом $u = 2x + y$, $v = x - 2y$ област интеграције D пресликава се у правоугаоник $G : [0, 1/2] \times [-6, -4]$, при чему је Јакобијан једнак $-1/5$. Према томе,

$$I = \iint_G v \cdot \sin(u\pi) \cdot \frac{1}{5} dudv = \frac{1}{5}\int_{-6}^{-4} vdv \cdot \int_0^{1/2} \sin(u\pi) du = \frac{1}{5} \cdot (-10) \cdot \frac{1}{\pi} = -\frac{2}{\pi}.$$

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Други колоквијум (5.6.2010) - Група 2

1. $a)$ Израчунати $\int \frac{\arctan \frac{x}{2}}{(x-2)^2} dx$.

$b)$ Израчунати $\int_{-\infty}^{0} \frac{\arctan \frac{x}{2}}{(x-2)^2} dx$ или установити његову дивергенцију.

Решење: $a)$ Дати интеграл се лако решава парцијалном интеграцијом. Ако је

$$u = \arctan \frac{x}{2}, \quad dv = \frac{dx}{(x-2)^2},$$

тада је

$$du = \frac{2dx}{x^2+4}, \quad v = -\frac{1}{x-2},$$

па је

$$I = \int \frac{\arctan \frac{x}{2}}{(x-2)^2} dx = -\frac{\arctan \frac{x}{2}}{x-2} + 2J, \quad J = \int \frac{dx}{(x-2)(x^2+4)}.$$

Како је

$$\frac{1}{(x-2)(x^2+4)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{x}{x^2+4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2+4},$$

то је

$$I = -\frac{\arctan \frac{x}{2}}{x-2} + \frac{1}{4} \ln \frac{|x-2|}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{4} \arctan \frac{x}{2} + C = F(x) + C.$$

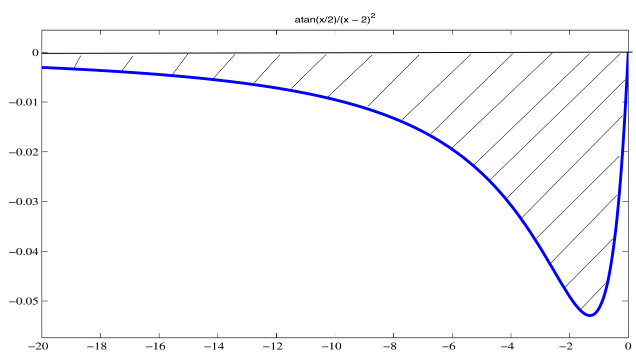


Figure 1: Grafik integranda

$b)$ Из

$$\lim_{x \to -\infty} (\ln |x-2| - \ln \sqrt{x^2+4} = \lim_{x \to -\infty} \ln \frac{|x-2|}{\sqrt{x^2+4}} = \ln 1 = 0$$

имамо

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 + \frac{1}{4} \cdot 0 - \frac{1}{4} \cdot \frac{-\pi}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

Према томе, дати интеграл постоји (конвергира),

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\arctan \frac{x}{2}}{(x-2)^2} dx = F(0) - F(-\infty) = 0 - \frac{\pi}{8} = -\frac{\pi}{8}.$$

Апсолутна вредност овог интеграла представља површину између графика интегранда и x-осе на интервалу $(-\infty, 0]$ (Слика 1).

2. Израчунати запремину тела насталог ротацијом око x-осе фигуре ограничене линијама: $y = 0,\ x = 1,\ x = 2,\ y = \sqrt{\arcsin \frac{1}{x}}$.

Решење: Фигура ограничена датим линијама је криволинијски трапез (Слика 2).

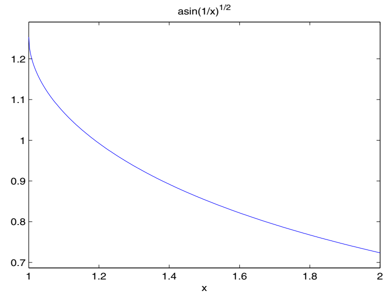


Figure 2: Figura koja rotira oko x-ose

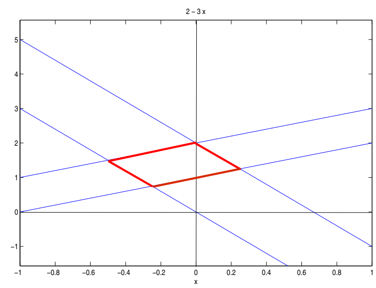


Figure 3: Oblast integracije

На основу формуле за запремину ротационог тела имамо $V = \pi \int_1^2 \arcsin \frac{1}{x} dx = \pi \cdot I$. Интеграл I налазимо парцијалном интеграцијом: $u = \arcsin \frac{1}{x}$, $dx = dv$, при чему је

$$du = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/x^2}} \cdot \frac{-dx}{x^2} = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}, \qquad v = x.$$

$$\begin{aligned}
I &= x \cdot \arcsin \frac{1}{x} \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \\
&= 2 \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 1 + \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \Big|_1^2 \\
&= 2 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt{3}) - \ln 1 \\
&= \frac{\pi}{6} + \ln(2+\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Према томе, $V = -\frac{\pi^2}{6} + \pi \cdot \ln(2+\sqrt{3})$.

3. Израчунати $\iint_D (x^2 - 2xy + y^2) e^{x+3y} dxdy$, где је D паралелограм ограничен правама $y = x + 1,\ y = x + 2,\ y = -3x$ и $y = -3x + 2$.

Решење: Трансформацијом $u = y - x,\ v = y + 3x$ област интеграције D (Слика 3, црвени паралелограм) пресликава се у правоугаоник $G : [1, 2] \times [0, 2]$, при чему је Јакобијан једнак $-1/4$. Према томе,

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2 - 2xy + y^2) e^{x+3y} dxdy &= \frac{1}{4} \iint_G u^2 e^v dudv \\
&= \frac{1}{4} \int_1^2 u^2 du \cdot \int_0^2 e^v dv \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{u^3}{3} \Big|_1^2 \cdot e^v \Big|_0^2 \\
&= \frac{7}{12}(e^2 - 1).
\end{aligned}$$

Коментар. 1. У првом задатку је било проблема са налажењем извода за $\arctan \frac{x}{2}$ и са налажењем граничне вредности типа '$\infty - \infty$'

$$\lim_{x\to-\infty}(\ln|x-2| - \ln\sqrt{x^2+4}).$$

Осим тога, у неким радовима су увођене разне 'ситне' и непотребне смене типа $\dfrac{x}{2} = t$ или $x - 2 = t$ (или чак обе), што је правило већи штету него корист.

2. У другом задатку највећи проблем је био налажење извода за $\arcsin\dfrac{1}{x}$. Дакле, и у првом и у другом задатку дошло је до изражаја знање из математике 1 (заслуга за то припада и кандидатима и наставницима).

3. Као и увек, и овог пута је било неколико кандидата који су покушали (али нису успели) да дати интеграл реше преко Декартових координата и области D (делећи је на три дела).

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Други колоквијум (11.6.2012) - Група 1

1. *a)* Израчунати $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$.

b) Испитати конвергенцију интеграла $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$.

Решење: *a)* Дати интеграл I се лако решава парцијалном интеграцијом. Ако је $u = \sqrt{x}$ и $dv = \frac{dx}{(1+x)^2}$, тада је $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ и $v = -\frac{1}{1+x}$, па је

$$I = -\frac{\sqrt{x}}{1+x} + \int \frac{1}{1+x} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{x}}{1+x} + \int \frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2} = -\frac{\sqrt{x}}{1+x} + \arctan\sqrt{x} + C.$$

Напомена. Ако се користи смена $\sqrt{x} = t$, добија се $I = 2\int \frac{t^2dt}{(1+t^2)^2}$, па се опет може применити парцијална интеграција са $u = t$, $dv = \frac{2tdt}{(1+t^2)^2}$. У решењима студената наставак је био следећи:

$$I = 2\int \frac{t^2dt}{(1+t^2)^2} = 2\int \frac{dt}{1+t^2} - 2\int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = 2 \cdot \arctan t - 2J,$$

где се интеграл J налазио применом парцијалне интеграције на интеграл $\int \frac{dt}{1+t^2}$. Интеграл J може да се добије и сменом $t = \tan s$.

Дати интеграл I може да се добије и без парцијалне интеграције уколико се интегранд f погодно трансформише. Како је

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2x}{(1+x)^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1+x+x-1}{(1+x)^2} = \frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{x+1-2x}{(1+x)^2} = \frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2} - d\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right),$$

то је $I = \arctan x - \frac{\sqrt{x}}{1+x} + C$.

b) Пошто је интегранд f непрекидна и позитивна функција на $[1, +\infty)$ за коју важи $f(x) \sim \frac{1}{x^{3/2}}$ када $x \to +\infty$ и пошто интграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ конвергира, то значи да и дати несвојствени интеграл конвергира. Овде је коришћена теорема (са предавања) о еквиконвергентности интеграла чији су интегранди еквивалентне функција када $x \to +\infty$.

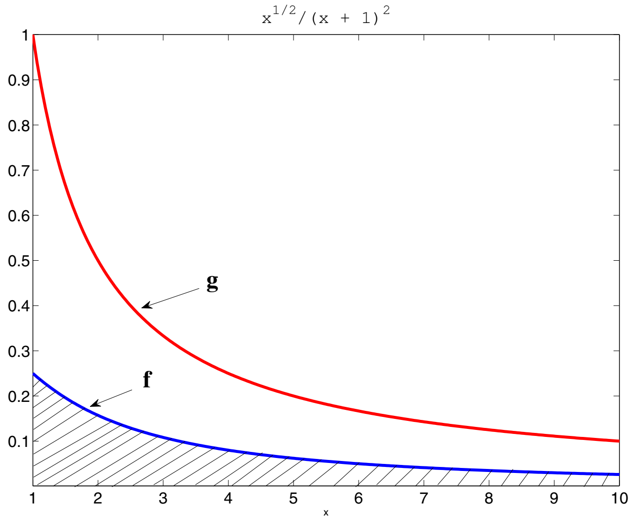
Напомена. Конвергентност датог несвојственог интеграла следи и из чињенице да важи

$$F(x) = \arctan\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{x+1} \to \frac{\pi}{2}, \quad x \to +\infty.$$

Дати интеграл може и да се израчуна (мада се не тражи),

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx = F(+\infty) - F(1) = \frac{\pi}{2} - \arctan 1 + \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

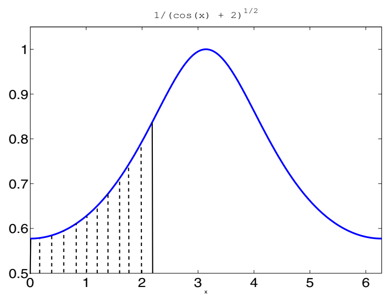
и он представља површину између графика интегранда и x-осе на интервалу $[1, +\infty)$ (Сл.1). Обзиром да интеграл функције $g : x \mapsto 1/x$ на истом интервалу дивергира, површина између графика функције g и x-осе је 'бесконачна', као и површина између графика функција f и g.



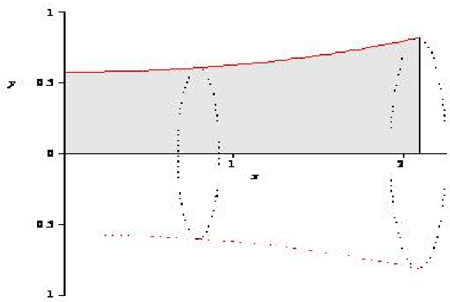
Сл 1: Графици функција f и g

2. Израчунати запремину тела насталог ротацијом око x-осе фигуре ограничене линијама: $y = 0$, $x = 0$, $x = \dfrac{2\pi}{3}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{2+\cos x}}$.

Решење: Фигура ограничена датим линијама је криволинијски трапез (Сл.2) који ротира око x-осе (Сл.3).



Сл 2: Фигура ограничена датим линијама



Сл 3: Фигура ротира око x-осе

На основу формуле за запремину ротационог тела имамо да је

$$V = \pi \int_0^{2\pi/3} y^2(x)dx = \pi \int_0^{2\pi/3} \frac{dx}{2+\cos x}.$$

Сменом $\tan\dfrac{x}{2} = t$ добијамо да је $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$ и $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, па је

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = 2\int \frac{dt}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\frac{t}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \tan\frac{x}{2}\right) + C = F(x) + C.$$

Према томе, $V = \pi(F(2\pi/3) - F(0)) = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}(\pi/4 - 0) = \dfrac{\pi^2}{2\sqrt{3}}$.

Напомена. Наравно, може и смена у одређеном интегралу,

$$V = \pi \int_0^{2\pi/3} \frac{dx}{2+\cos x} = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{3+t^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi^2}{2\sqrt{3}}.$$

Ако интегранд трансформишемо,

$$\frac{1}{2+\cos x}=\frac{2-\cos x}{4-\cos^2 x}=\frac{2-\cos x}{3+\sin^2 x}=\frac{2}{3+\sin^2 x}-\frac{\cos x}{3+\sin^2 x},$$

тада имамо да је

$$\int\frac{dx}{2+\cos x}=\int\frac{2dx}{3+\sin^2 x}-\int\frac{\cos x dx}{3+\sin^2 x}=K-L.$$

Интеграле K и L лако налазимо (први сменом $\tan x=t$, а други сменом $\sin x=t$)

$$K=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x}{\sqrt{3}}+C_1=G(x)+C_1,\quad L=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\sin x}{\sqrt{3}}+C_2=H(x)+C_2.$$

Према томе, $G(x)-H(x)$ је такође примитивна функција за функцију $x\mapsto\frac{1}{2+\cos x}$. Како се примитивне функције разликују за константу, то је $G(x)-H(x)=F(x)+C$. Заменом $x=0$ добијамо да је $C=0$, што значи да је $G(x)=H(x)+F(x)$, односно важи једнакост

$$\arctan\frac{2\tan x}{\sqrt{3}}=\arctan\frac{\sin x}{\sqrt{3}}+2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\tan\frac{x}{2}\right).$$

Специјално, за $x=\pi/3$ имамо једнакост

$$\arctan 2=\arctan\frac{1}{2}+2\arctan\frac{1}{3}.$$

3. Израчунати

$$\iint_D\frac{\ln(x^2-2xy+y^2+1)}{2x+3y+2}dxdy,$$

где је $D=\{(x,y)\ :\ y\le x\le y+1,\ 0\le 2x+3y\le 2\}$.

Решење: Трансформацијом $u=y-x$, $v=2x+3y$ област интеграције D пресликава се у правоугаоник $G:[-1,0]\times[0,2]$, при чему је Јакобијан једнак $-1/5$. Према томе,

$$\begin{aligned}\iint_D\frac{\ln(x^2-2xy+y^2+1)}{2x+3y+2}dxdy &= \frac{1}{5}\iint_G\frac{\ln(1+u^2)}{v+2}dudv\\ &= \frac{1}{5}\int_{-1}^{0}\ln(1+u^2)du\cdot\int_0^2\frac{dv}{v+2}\\ &= \frac{1}{5}\cdot A(x)\Big|_{-1}^{0}\cdot B(x)\Big|_0^2,\end{aligned}$$

где су A и B примитивне функције за $\int\ln(x^2+1)dx$ и $\int\frac{dx}{x+2}$. За први интеграл парцијалном интеграцијом ($u=\ln(1+x^2)$, $dv=dx$) добијамо

$$A(x)=x\ln(1+x^2)-2\int\frac{x^2}{x^2+1}dx=x(\ln(x^2+1)-2)+2\cdot\arctan x,$$

а други интеграл је таблични, $B(x)=\ln|x+2|$.

Према томе,

$$\iint_D\frac{\ln(x^2-2xy+y^2+1)}{2x+3y+2}dxdy=\frac{1}{5}\cdot(A(0)-A(-1))\cdot(B(2)-B(1))=\frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{2}+\ln 2-2\right)\ln 2.$$

Напомена. За трансформацију $u = x - y$, $v = 2x + 3y$ нова област интеграције је $[0,1] \times [0,2]$, Јакобијан је једнак $1/5$, а све остало је исто. За налажење Јакобијана не мора се решавати по x и y јер је, на пример у овом случају,

$$\frac{1}{J} = \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5.$$

БИСЕРИ

У радовима је и овога пута било доста 'бисера'. Неки су већ виђени, али има и нових.

- $$\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx + C}{(1+x)^2}.$$
- $$x^{1/2} + x^{3/2} = x^2.$$
- $$\int x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{x^3}{3} \cdot \arctan x.$$
- $$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx = \int \sqrt{x} dx \cdot \int \frac{dx}{(1+x)^2}.$$
- $$\int \frac{dx}{2 + \cos x} = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{dx}{\cos x}.$$
- $$\frac{t^{\cancel{2}}}{(1+t^2)^{\cancel{2}}} = \frac{t}{1+t^2}.$$

МАТЕМАТИКА 2

Други писмени колоквијум, 12.6.2013

Група 7

Решења задатака

Драган Ђорић

Задаци и решења

1. Израчунати $\int \frac{\sin^2 x + 3}{\cos^2 x} dx$.

Решење: Ако $\sin^2 x$ заменимо са $1 - \cos^2 x$ имамо да је

$$I = \int \frac{\sin^2 x + 3}{\cos^3 x} dx = 4 \int \frac{dx}{\cos^3 x} - \int \frac{dx}{\cos x} = 4A - B.$$

На интеграл A можемо применити парцијалну интеграцију. За $u = \frac{1}{\cos x}$ и $dv = \frac{dx}{\cos^2 x}$ је $du = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ и $v = \tan x$, па је

$$A = \frac{\tan x}{\cos x} - \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx = \frac{\tan x}{\cos x} - \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} dx = \frac{\tan x}{\cos x} - A + B.$$

Према томе, $2A = \frac{\tan x}{\cos x} + B$, што значи да је за интеграле A и I довољно израчунати интеграл B.

Како је

$$B = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right| + C,$$

то је

$$I = 4A - B = 2\frac{\tan x}{\cos x} + B = 2\frac{\tan x}{\cos x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right| + C.$$

Напомена. Из претходног решења имамо функцију

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right|$$

која је примитивна функција интеграла B. Решавањем тог интеграла другим начинима добијамо друге примитивне функције, као што су

$$F_1(x) = \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\cos x} \right|,$$

$$F_2(x) = \ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|,$$

$$F_3(x) = \ln \left| \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right| - \ln \left| \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right|,$$

$$F_4(x) = \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} + 1}{\tan \frac{x}{2} - 1} \right|.$$

Друго решење. Пошто је

$$A = \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\cos x \, dx}{\cos^4 x} = \int \frac{d(\sin x)}{(1 - \sin^2 x)^2},$$

сменом $\sin x = t$ добијамо $A = \int \frac{dt}{(1-t^2)^2}$. Применом парцијалне интеграције на интеграл $B = \int \frac{dt}{1-t^2}$, узимајући $u = \frac{1}{1-t^2}$ и $dv = dt$, имамо да је $B = \frac{t}{t^2 - 1} + 2B - 2A$. Из ове једнакости следи да је $2A = B + \frac{t}{1-t^2}$, односно

$$I = 4A - B = 2B + \frac{2t}{1-t^2} - B = \frac{2t}{1-t^2} + B = 2\frac{\sin x}{\cos^2 x} + B = 2\frac{\tan x}{\cos x} + F(x) + C.$$

Напомена. Ако за интеграл A уведемо стандардну тригонометријску смену $t = \tan\dfrac{x}{2}$, тада (након дужег рачунања) добијамо да је

$$\begin{aligned} A &= 2\int \frac{t^4+2t^2+1}{(1-t^2)^3} \\ &= \frac{t^3+t}{(1-t^2)^2} - \frac{1}{2}\ln|1-t| + \frac{1}{2}\ln|1+t| + C. \end{aligned}$$

Треће решење. Ако у интегралу I уведемо смену $\sin x = t$ добијамо

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin^2 x+3}{\cos^4 x}\cos x dx \\ &= \int \frac{t^2+3}{(1-t)^2(1+t)^2}dt \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t} + \int \frac{dt}{(1-t)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t} + \int \frac{dt}{(1+t)^2} \\ &= -\frac{1}{2}\ln|1-t| + \frac{1}{1-t} + \frac{1}{2}\ln|1+t| - \frac{1}{1+t} + C \\ &= \frac{2t}{1-t^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C \\ &= 2\frac{\tan x}{\cos x} + F(x) + C. \end{aligned}$$

Напомена. Ако за интеграл I уведемо стандардну тригонометријску смену $t = \tan\dfrac{x}{2}$, тада (након заморног рачунања) добијамо да је

$$\begin{aligned} I &= 2\int \frac{3t^4+10t^2+3}{(1-t^2)^3} \\ &= 4\frac{t^3+t}{(1-t^2)^2} - \ln|1-t| + \ln|1+t| + C. \end{aligned}$$

Четврто решење. Ако уведемо смену $\tan x = t$ (сасвим нестандардну за овај интеграл), тада је

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

па је

$$I = 4A - B = 4\int \sqrt{1+t^2} - \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = 4P - \ln(t+\sqrt{1+t^2}).$$

Парцијалном интеграцијом се лако добија да је

$$P = \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln(t+\sqrt{1+t^2}) + C.$$

Према томе, имамо да је

$$\begin{aligned} I &= 2t\sqrt{1+t^2} + \ln(t+\sqrt{1+t^2}) + C \\ &= 2\tan x\sqrt{1+tan^2 x} + \ln(\tan x + \sqrt{1+\tan^2 x}) + C \\ &= 2\frac{\tan x}{\cos x} + \ln\left|\frac{\sin x+1}{\cos x}\right| + C \\ &= 2\frac{\tan x}{\cos x} + F_1(x) + C. \end{aligned}$$

---

2. Израчунати запремину тела насталог ротацијом око x-осе фигуре ограничене кривом $y = x\sqrt{3\ln\dfrac{1+x}{1-x}}$ и правама: $y = 0,\ x = 0$ и $x = 1/2$.

Решење: Фигура ограничена датим линијама је криволинијски трапез који ротира око x-осе На основу формуле за запремину ротационог тела имамо да је

$$V = \pi\int_0^{1/2} y^2(x)dx = 3\pi\int_0^{1/2} x^2\ln\frac{1+x}{1-x}dx = 3\pi\ I.$$

Ако на интеграл I применимо парцијалну интеграцију са $u = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$ и $dv = x^2dx$, добијамо

$$du = \frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}dx = \frac{2dx}{1-x^2},\quad v = \frac{x^3}{3},$$

па је

$$\begin{aligned}
I &= \frac{x^3}{3}\ln\frac{1+x}{1-x}\Big|_0^{1/2} - \frac{2}{3}\int_0^{1/2}\frac{x^3dx}{1-x^2}\\
&= \frac{1}{8\cdot 3}\ln 3 - \frac{1}{3}\int_0^{1/4}\frac{tdt}{1-t}\\
&= \frac{1}{8\cdot 3}\ln 3 + \frac{1}{3}\left(t + \ln|t-1|\right)\Big|_0^{1/4}\\
&= \frac{1}{8\cdot 3}\ln 3 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{3}{4}\right).
\end{aligned}$$

Према томе,

$$V = 3\pi I = \frac{\pi}{8}\ln 3 + \frac{\pi}{4} + \pi\ln\frac{3}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{9}{8}\pi\ln 3 - 2\pi\ln 2.$$

---

3. Израчунати

$$\iint_D \frac{3x+y}{1+(x-y)^2}\ \arctan(x-y)dxdy,$$

где је D паралелограм ограничен правама: $y = -3x+1,\ y = -3x+\sqrt{3},\ y = x$ и $y = x-1$.

Решење: Трансформацијом $u = y - x,\ v = 3x + y$ област интеграције D пресликава се у правоугаоник $G : [-1, 0] \times [1, \sqrt{3}]$, при чему је Јакобијан једнак $-1/4$. Према томе,

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{3x+y}{1+(x-y)^2}\ \arctan(x-y)dxdy &= \frac{1}{4}\iint_G \frac{v}{1+u^2}\arctan(-u)dudv\\
&= \frac{1}{4}\int_{-1}^{0}\frac{\arctan u}{1+u^2}du\cdot\int_1^{\sqrt{3}} vdv\\
&= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\arctan^2 u\Big|_{-1}^{0}\cdot\frac{v^2}{2}\Big|_1^{\sqrt{3}}\\
&= -\frac{1}{8}\left(0 - \frac{\pi^2}{16}\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{\pi^2}{128}.
\end{aligned}$$

МАТЕМАТИКА 2

Други писмени колоквијум, 16.6.2014

Група 8

Решења задатака и резултати

Драган Ђорић

Задаци и решења

1. Израчунати $\int \frac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}+1)(x+1)}dx.$

Решење: Сменом $x=t^3$ имамо да је $\sqrt[3]{x}=t$ и $dx=3t^2dt$, па је

$$I=\int \frac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}+1)(x+1)}dx=3\int f(t)dt,$$

где је

$$f(t)=\frac{t(t+2)}{(t+1)^2(t^2-t+1)}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{(t+1)^2}+\frac{Ct+D}{t^2-t+1}.$$

Из једнакости

$$t(t+2)=A(t+1)(t^2-t+1)+B(t^2-t+1)+(Ct+D)(t+1)^2$$

за $t=-1$ добијамо да је $B=-1/3$, за $t=0$ добијамо да је $A+D=1/3$, за $t=1$ добијамо да је $2C+D=4/3$, а за $t=-2$ добијамо да је $4A+C=-1$.

Из система $A+D=1/3$, $4A+C=-1$, $2C+D=4/3$ лако налазимо да је $A=-1/3$, $C=1/3$ и $D=2/3$.

Према томе,

$$\begin{aligned} I&=-\int\frac{dt}{t+1}-\int\frac{dt}{(t+1)^2}+\int\frac{t+2}{t^2-t+1}dt\\ &=-\ln|t+1|+\frac{1}{t+1}+\frac12\ln(t^2-t+1)+\frac52\int\frac{dt}{(t-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}\\ &=-\ln|t+1|+\frac{1}{t+1}+\frac12\ln(t^2-t+1)+\frac{5}{\sqrt3}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt3}+C, \end{aligned}$$

где је $t=\sqrt[3]{x}$.

---

2. Израчунати дужину лука криве $x=t^2\cos\frac1t$, $y=t^2\sin\frac1t$ за $\frac12\le t\le\sqrt2$.

Решење: Како је

$$\begin{aligned} x'&=2t\cos\frac1t-t^2\sin\frac1t\cdot\frac{-1}{t^2}=2t\cos\frac1t+\sin\frac1t,\\ y'&=2t\sin\frac1t+t^2\cos\frac1t\cdot\frac{-1}{t^2}=2t\sin\frac1t-\cos\frac1t, \end{aligned}$$

то је

$$\begin{aligned} x'^2+y'^2&=4t^2\cos^2\frac1t+\sin^2\frac1t+4t\sin\frac1t\cos\frac1t+4t^2\sin^2\frac1t+\cos^2\frac1t-4t\sin\frac1t\cos\frac1t\\ &=4t^2+1. \end{aligned}$$

Према формули за дужину лука имамо да је $l=\int_{1/2}^{\sqrt2}\sqrt{4t^2+1}\,dt$.

Ако је $I=\int\sqrt{4t^2+1}\,dt$, тада сменом $2t=shz$ имамо да је $4t^2+1=ch^2z$ и $2dt=chzdz$, па је

$$I=\frac12\int ch^2zdz=\frac14\int(1+ch2z)dz=\frac14z+\frac18sh2z+C,$$

односно

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{4}\operatorname{arcsh}(2t) + \frac{1}{4} shzchz + C \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{arcsh}(2t) + \frac{1}{4} 2t\sqrt{1+4t^2} + C \\
&= \frac{1}{4}\ln(2t + \sqrt{4t^2+1}) + \frac{1}{2} t\sqrt{4t^2+1} + C.
\end{aligned}$$

Према томе,

$$\begin{aligned}
l = I\Big|_{1/2}^{\sqrt{2}} &= \frac{1}{4}(\operatorname{arcsh}(2\sqrt{2}) - \operatorname{arcsh}(1)) + \frac{5}{4}\sqrt{2} \\
&= \frac{1}{4}\ln\frac{2\sqrt{2}+3}{1+\sqrt{2}} + \frac{5}{4}\sqrt{2} \\
&= \frac{1}{4}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{5}{4}\sqrt{2} \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{arcsh}(1) + \frac{5}{4}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Напомена. Интеграл I можемо да добијемо и парцијалном интеграцијом са $u = \sqrt{4t^2+1}$ и $dv = dt$. Тада је $du = \dfrac{4tdt}{\sqrt{4t^2+1}}$ и $v = t$, па је

$$I = t\sqrt{4t^2+1} - \int \frac{4t^2+1-1}{\sqrt{4t^2+1}}dt = t\sqrt{4t^2+1} - I + \int \frac{dt}{\sqrt{4t^2+1}}$$

одакле следи да је

$$2I = t\sqrt{4t^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1/4}} = t\sqrt{4t^2+1} + \frac{1}{2}\ln(t + \sqrt{t^2+1/4}) + D.$$

Према томе,

$$I = \frac{1}{2}t\sqrt{4t^2+1} + \frac{1}{4}\ln(t + \sqrt{t^2+1/4}) + E.$$

---

3. Израчунати

$$\iint_D \frac{y^2 \ln\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,$$

где је $D\left\{(x,y)\ :\ 1 \le x^2+y^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ \dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y\right\}$.

Решење: Преласком на поларне координате $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ област интеграције D пресликава се у правоугаоник $G : [\pi/6, \pi/2] \times [1,3]$, при чему је Јакобијан једнак ρ.

Према томе,

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{y^2 \ln\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy &= \int_1^3 \rho^2 \ln\rho d\rho \cdot \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^2\varphi d\varphi \\
&= \left[\frac{1}{3}\rho^3\ln\rho - \frac{1}{9}\rho^3\right]\Big|_1^3 \cdot \left[\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} \\
&= \left(9\ln 3 - \frac{26}{9}\right)\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right).
\end{aligned}$$

МАТЕМАТИКА 2

Други писмени колоквијум, 11.6.2015

Група 2

Решења задатака и резултати

Драган Ђорић

Задаци и решења

1. Израчунати $\int \frac{1}{x}\sqrt{\ln^2 \sqrt{x} - 9}\, dx$.

Решење: Уочимо да је

$$I = \int \frac{1}{x}\sqrt{\ln^2 \sqrt{x} - 9}\, dx = \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{4}\ln^2 x - 9}\, dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{\ln^2 x - 36}\, d(\ln x) = \frac{1}{2}J.$$

За интеграл J потребно је израчунати $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$. Парцијалном интеграцијом са $u = \sqrt{x^2 - a^2}$ и $dv = dx$ или сменом $t = a\cosh x$ добија се да је

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C.$$

Према томе,

$$I = \frac{1}{4}\ln x\sqrt{\ln^2 x - 36} - 9\ln(\ln x + \sqrt{\ln^2 x - 36}) + C.$$

---

2. Израчунати дужину лука криве $y = \ln(1 - x^2)$ за $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Решење: Како је $y' = -\frac{2x}{1 - x^2}$, то је $1 + y'^2 = 1 + \frac{4x^2}{(1 - x^2)^2} = \frac{(1 + x^2)^2}{(1 - x^2)^2}$. Према формули за дужину лука имамо да

$$l = \int_0^{1/2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_0^{1/2} \frac{1 + x^2}{1 - x^2} dx = -x\Big|_0^{1/2} + 2\int_0^{1/2} \frac{dx}{1 - x^2} = -\frac{1}{2} + \ln\frac{1 + x}{1 - x}\Big|_0^{1/2} = -\frac{1}{2} + \ln 3.$$

Напомена. За $x \in [0, 1/2]$ је $\sqrt{\frac{(1 + x^2)^2}{(1 - x^2)^2}} = \sqrt{\frac{(1 + x^2)^2}{(x^2 - 1)^2}} = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$.

---

3. Израчунати

$$\iint_D \left(\frac{y}{x}\right)^2 \frac{1}{x^2 + y^2} dxdy,$$

где је $D\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2,\ x \leq y \leq \sqrt{3}x\right\}$.

Прво решење: Трансформацијом $(x, y) \mapsto (u, v)$, где је $u = x^2 + y^2$ и $v = y/x$, област интеграције D пресликава се у правоугаоник $G = [1, e^2] \times [1, \sqrt{3}]$. Како је

$$\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ -y/x^2 & 1/x \end{vmatrix} = 2 + \frac{2y^2}{x^2} = 2(1 + v^2),$$

то је $J = \frac{1}{2(1 + v^2)}$.

Према томе,

$$\begin{aligned}\iint_D \left(\frac{y}{x}\right)^2 \frac{1}{x^2+y^2}dxdy &= \frac{1}{2}\iint_G \frac{v^2}{u(1+v^2)}dudv \\ &= \frac{1}{2}\int_1^{e^2}\frac{du}{u}\cdot\int_1^{\sqrt{3}}\frac{v^2dv}{1+v^2} \\ &= \frac{1}{2}\ln u\,\Big|_1^{e^2}\cdot\left[\int_1^{\sqrt{3}}dv-\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dv}{1+v^2}\right] \\ &= \sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}.\end{aligned}$$

Друго решење: Преласком на поларне координате $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ област интеграције D пресликава се у правоугаоник $E = [\pi/4, \pi/3] \times [1, e]$, при чему је $J = \rho$.

Према томе,

$$\begin{aligned}\iint_D \left(\frac{y}{x}\right)^2 \frac{1}{x^2+y^2}dxdy &= \iint_E \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\rho d\varphi \\ &= \int_1^{e}\frac{d\rho}{\rho}\cdot\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{1-\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}d\varphi \\ &= \ln\rho\,\Big|_1^{e}\cdot\left[\tan\varphi\,\Big|_{\pi/4}^{\pi/3}-\varphi\,\Big|_{\pi/4}^{\pi/3}\right] \\ &= \sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}.\end{aligned}$$