МАТЕМАТИКА 2

Други колоквијум, јуни 2019 - група 2

Драган Ђорић

1. Израчунати $\displaystyle\int \frac{x\sqrt{x^2+1}}{16x^4-25}dx$.

Решење. Сменом $x^2+1=t^2$ имамо да је $xdx=tdt$, па је

$$I=\int \frac{t^2dt}{16(t^2-1)^2-25}=\int \frac{t^2dt}{(4t^2-9)(4t^2+1)}.$$

Како је[1]

$$\frac{t^2}{(2t-3)(2t+3)(4t^2+1)}=\frac{3}{80}\cdot\frac{1}{2t-3}-\frac{3}{80}\cdot\frac{1}{2t+3}+\frac{1}{40}\cdot\frac{1}{4t^2+1},$$

то је

$$I=\frac{3}{160}\ln|2t-3|-\frac{3}{160}\ln|2t+3|+\frac{1}{80}\arctan 2t+K=\frac{3}{160}\ln\left|\frac{2t-3}{2t+3}\right|+\frac{1}{80}\arctan 2t+K,$$

где је $K\in\mathbb{R}$.

Према томе,

$$I=\frac{3}{160}\ln\left|\frac{2\sqrt{x^2+1}-3}{2\sqrt{x^2+1}+3}\right|+\frac{1}{80}\arctan 2\sqrt{x^2+1}+K.$$

2. Израчунати запремину тела насталог ротацијом око Oy осе фигуре ограничене линијама $y=(x-2)^2$ и $2x-y=4$.

Решење. Нека је V_1 запремина тела које настаје ротацијом око y-осе криволинијског трапеза одређеног функцијом $x_1:y\mapsto 2+\sqrt{y}$ за $y\in[0,4]$ и нека је V_2 запремина тела које настаје ротацијом око y-осе трапеза одређеног функцијом $x_2:y\mapsto 2+y/2$ за $y\in[0,4]$. Тада је тражена запремина V једнака V_1-V_2.

[1] Из једнакости

$$t^2=A(2t+3)(4t^2+1)+B(2t-3)(4t^2+1)+(Ct+D)(2t-3)(2t+3)$$

коефицијенте A, B, C и D лако одређујемо бирањем 'погодних' вредности за t. За $t=3/2$ добијамо да је $A=3/80$, за $t=-3/2$ добијамо да је $B=-3/80$, а за $t=0$ заменом вредности за A и B добијамо да је $D=1/40$. Најзад, за $t=i/2$ добијамо да је $C=0$.

Како је

$$V_1 = \pi \int_0^4 x_1^2(y)dy = \pi \int_0^4 (2+\sqrt{y})^2 dy = \frac{136}{3}\pi, \quad V_2 = \int_0^4 x_2^2(y)dy = \pi \int_0^4 (2+y/2)^2 dy = \frac{112}{3}\pi,$$

то је $V = V_1 - V_2 = 8\pi$.

Друго решење. Нека је V_3 запремина тела које настаје ротацијом око y-осе троугла са теменима $(2,0)$, $(4,0)$ и $(4,4)$ и нека је V_4 запремина тела које настаје ротацијом криволиниског троугла одређеног функцијом $y : x \mapsto (x-2)^2$ за $x \in [2,4]$. Тада је $V = V_3 - V_4$. Како је

$$V_3 = 2\pi \int_2^4 x(2x-4)dx = \frac{80\pi}{3}, \quad V_4 = 2\pi \int_2^4 |xy(x)|dx = 2\pi \int_2^4 x(x-2)^2 dx = \frac{56\pi}{3},$$

то је $V = V_3 - V_4 = 8\pi$.

3. Израчунати

$$\iint_D (4x^2 - y^2)\cos^2(2x+y)dxdy,$$

где је D паралелограм ограничен правама

$$y = -2x, \quad y = -2x + \frac{\pi}{2}, \quad y = 2x - 1, \quad y = 2x - 2.$$

Решење. Сменом $u = 2x + y$ и $v = 2x - y$ имамо да је

$$I = \iint_D (4x^2 - y^2)\cos^2(2x+y)dxdy = \iint_G uv\cos^2 u|J|dudv,$$

где је $G = [0, \pi/2] \times [1,2]$ и $1/J = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = -4$.

Област G је правоугаоник, па је

$$I = \frac{1}{4}\int_1^2 vdv \int_0^{\pi/2} u\cos^2 udu = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}\cdot K,$$

где је

$$K = \int_0^{\pi/2} u\cos^2 udu = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} udu + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} u\cos 2udu = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}.$$

Према томе, $I = \frac{3}{128}(\pi^2 - 4)$.