M2 - 14. ПРЕДАВАЊЕ

Драган Ђорић

Факултет организационих наука

2009/2010

РЕДОВИ

- Бројни редови
- Редови са позитивним члановима
- Алтернативни редови
- Степени редови

Бројни редови

- **Основни појмови**
- **Нека својства редова**
- **Кошијев критеријум конвергенције**

Основни појмови

Да ли '*бесконачна сума*' реалних бројева

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

има смисла?

Очигледно да у случају

$$1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots$$

таква сума није коначна,

а у случају

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdot$$

она не постоји.

Међутим, у случају

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

таква сума постоји и једнака је 2 (*бесконаначни геометријски ред*).

Дакле, у неким случајевима '*бесконачна сума*' има, а у неким случајевима нема смисла.

Нека је (a_n) низ реалних бројева и нека је (s_n) низ дефинисан са

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad n \in N.$$

Дефиниција Израз

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

је бесконачни ред или краће ред са општим чланом a_n и парцијалном сумом s_n.

У зависности од тога да ли низ (s_n) конвергира или не дефинишу се одговарајући појмови за ред.

Дефиниција Дати ред конвергира ако је низ његових парцијалних сума конвергентан, а дивергира ако низ парцијалних сума није конвергентан.

Каже се такође и да је дати ред *конвергентан*, односно *дивергентан*.

Ако ред конвергира и ако $s_n \to s$ $(n \to \infty)$, пише се

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s,$$

укључујући и случај $s = \pm\infty$.

Примери

1. Ред са општим чланом $a_n = (-1)^n$ дивергира јер низ (s_n) није конвергентан.
2. (*Геометријски ред*) Ако је $a_n = q^{n-1}$ за $q \neq 0$, тада је
$$s_n = 1 + q + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$
за $q \neq 1$ и $s_n = n$ за $q = 1$. Према томе, ред конвергира за $|q| < 1$ и дивергира за $|q| \geq 1$.
3. Ред са општим чланом $a_n = \frac{1}{n^2}$ конвергира јер је низ (s_n) растући и ограничен одозго,
$$s_n < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \frac{1}{n}.$$
4. Ред са општим чланом $a_n = \ln(1 + 1/n)$ дивергира јер је
$$s_n = \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) \to \infty \ (n \to \infty).$$

Нека својства редова

Неопходан услов конвергенције

Теорема Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, тада $a_n \to 0 \ (n \to \infty)$.

Доказ. Тврђење следи из једнакости

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

и претпоставке о конвергенцији реда. ∎

Обрнуто тврђење не важи,

односно услов $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ није довољан,

већ само неопходан услов конвергенције.

На пример, ако је $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, тада $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, а

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Из теореме следи (на основу закона контрапозиције) да ред дивергира ако општи члан не тежи нули кад n тежи ∞.

На пример, ред са општим чланом $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ дивергира.

Операције са редовима

Следећа теорема даје могућност да се уведу и неке операције са редовима.

Теорема 1. Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, онда конвергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ за $c \in R$, при чему је $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Ако редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергирају, онда конвергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, при чему је

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Доказ. Нека је s_n парцијална сума реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и t_n парцијална сума реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

1. Како је парцијална сума реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ једнака cs_n, ред је конвергентан и важи дата једнакост.
2. Како је

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) = s_n + t_n,$$

   ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ конвергира и важи дата једнакост. ∎

За ред $\sum\limits_{n=1}^{n}(a_n + b_n)$ кажемо да је *збир* редова $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Кошијев критеријум конвергенције

Следеће тврђење даје општи критеријум, односно потребан и довољан услов за конвергенцију произвољног реда.

Теорема Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира ако и само ако за за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0(\varepsilon) \in N$ тако да из $n > m > n_0$ следи

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| < \varepsilon.$$

Доказ. Како је

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n = s_n - s_m,$$

из претпоставке теореме следи да за низ (s_n) важи одговарајући Кошијев критеријум за низове, па тај низ конвергира, што значи да и ред конвергира. ■

Примери

1. Ако је $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, тада је

$$\begin{aligned} s_m - s_n &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} \\ &\le \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(m-1)m} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \\ &< \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

па је за $m > n > n_0 > 1/\varepsilon$ испуњен услов Кошијевог критеријума, што значи да ред конвергира.

2. (*Хармонијски ред*) Ако је $a_n = \dfrac{1}{n}$, тада је

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

па ред не конвергира јер није испуњен услов из Кошијевог критеријума.

РЕДОВИ СА НЕНЕГАТИВНИМ ЧЛАНОВИМА

- **Критеријуми упоређивања**
- **Даламберов критеријум**
- **Кошијев критеријум**
- **Интегрални критеријум**

Критеријуми упоређивања

Ако је $a_n \geq 0$ за $n \geq n_0 \in N$, низ парцијалних сума (s_n) реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ је неопадајући за $n \geq n_0$.

Према томе, ако је низ (s_n) ограничен, ред конвергира, а у противном дивергира ка $+\infty$.

Теорема Нека су $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ редови са ненегативним члановима и нека је $a_n \leq b_n$ за $n \geq n_0$.

1. Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира, тада и ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира.

2. Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира, тада и ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ дивергира.

Доказ. Из конвергенције реда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следи ограниченост низа његових парцијалних сума, а из претпоставке $a_n \leq b_n$ следи да је и низ парцијалниxх сума реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ такође ограничен.

Према томе, важи 1., а 2. следи из 1. на основу закона контрапозиције. ■

Примери

1. Како je $\dfrac{1}{n^\alpha} > \dfrac{1}{n}$ за $\alpha < 1$, из дивергенције хармонијског реда следи конвергенција реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ за $\alpha < 1$.

2. Како je $\dfrac{1}{n^\alpha} < \dfrac{1}{n^2}$ за $\alpha > 2$, из конвергеницје реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ следи конвергенција реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ за $\alpha > 2$.

3. Из

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1\cdot 2\cdots n}{n\cdot n\cdots n} \leq \frac{1\cdot 2}{n^2}$$

следи конвергенција реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

4. Из конвергенције реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$ следи

конвергенција реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$ јер је $\displaystyle\frac{a_n}{1+n^2 a_n} < \frac{1}{n^2}$.

Теорема Нека су $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ редови са ненегативним члановима и нека je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

за $n \geq n_0$.

1. Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира, тада и ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира.
2. Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира, тада и ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ дивергира.

Доказ. Претпоставимо ради једноставности да је $n_0 = 1$. Из претпоставке теореме следи да важе неједнакости

$$\frac{a_2}{a_1} \le \frac{b_2}{b_1}, \quad \frac{a_3}{a_2} \le \frac{b_3}{b_2}, \quad \ldots, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} \le \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

из којих следи да је

$$a_n \le \frac{a_1}{b_1} b_n, \quad \frac{b_1}{a_1} a_n \le b_n.$$

Из ових неједнакости тврђење следи на основу претходне теореме. ■

Даламберов критеријум

Следећа теорема даје довољан услов за конвергенцију, односно дивергенцију реда са ненегативним члановима.

Теорема (Даламберов критеријум) Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ред са ненегативним члановима.

1. Ако за $n \geq n_0$ важи
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1,$$
дати ред конвергира.
2. Ако за $n \geq n_0$ важи
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1,$$
дати ред дивергира.

Доказ. Како геометријски ред $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ конвергира за $0 < q < 1$, из неједнакости

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q = \frac{q^{n+1}}{q^n}$$

и претходне теореме следи 1.

Ако

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1,$$

општи члан a_n не тежи нули, што значи да важи 2. ■

Претпоставимо да за ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ са ненегативним члановима постоји

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

Из теореме следи да дати ред

конвергира ако је $l < 1$

и

дивергира ако је $l > 1$.

У случају $l = 1$ нема закључка, јер ред тада може бити конвергентан, а може бити и дивергентан.

На пример, и за хармонијски ред и за ред са $a_n = 1/n^2$ је $l = 1$.

Примери

1. Ред са општим чланом $a_n = \dfrac{n^2+n+1}{2^n}$ конвергира јер је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+n+1+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2+n+1} = \frac{1}{2}.$$

2. Ред са општим чланом $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ конвергира јер је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4}.$$

Кошијев критеријум

Још један довољан услов за конвергенцију, односно дивергенцију је дат следећом теоремом.

Теорема (Кошијев критеријум) Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ред са ненегативним члановима.

1. Ако за $n \geq n_0$ важи
$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1,$$
дати ред конвергира.
2. Ако за $n \geq n_0$ важи
$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1,$$
дати ред дивергира.

Доказ. Тврђење 1. следи из прве тоереме о поредбеним критеријумима за $b_n = q^n$, а тврђење 2. следи из чињенице да је $a_n \geq 1$ за $n \geq n_0$. $\blacksquare$

Као и код Даламберовог критеријума, у случају да постоји

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l,$$

из теореме следи да дати ред конвергира ако је $l < 1$ и дивергира ако је $l > 1$.

У случају $l = 1$ нема закључка, јер ред тада може бити конвергентан, а може бити и дивергентан.

На пример, и за хармонијски ред и за ред са $a_n = 1/n^2$ је $l = 1$. Исто важи и ако је

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

Примери

1. Ред за који је $a_n = \dfrac{1}{\ln^n n}$ конвергира јер је
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0.$$

2. Ред за који је $a_{2n} = \dfrac{1}{3^n}$ и $a_{2n+1} = \dfrac{1}{2^n}$ је конвергентан јер је
$$\sqrt[2n]{a_{2n}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \sqrt[2n+1]{a_{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \limsup_{n\to\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

Интегрални критеријум

Теорема Нека $f : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ и нека је:

1. f непрекидна и опадајућа функција,
2. $a_n = f(n)$.

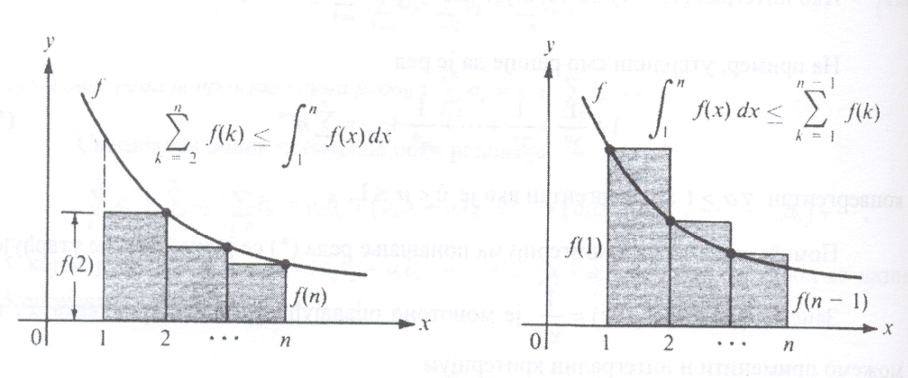
Тада

$$\sum_{n=1}^{n} a_n \text{ конвергира}$$

ако и само ако

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ конвергира.}$$

Доказ.



Из 1. следи

$$f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \leq \int_1^n f(x)dx \leq f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)$$

$$f(2)+f(3)+\cdots+f(n)\leq\int_1^n f(x)dx\leq f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)$$

Ако интеграл конвергира, тада из прве неједнакости и 2. следи да је низ парцијалних сума реда ограничен, па и ред конвергира.

Ако интеграл дивергира (ка $+\infty$), тада из 2. и друге неједнакости следи да и ред дивергира.

На основу закона контрапозиције закључујемо да интеграл конвергира ако ред конвергира.

Тврђење важи и ако су услови за f испуњени за $x\geq n_0\in N$ (уместо $x\geq 1$).

Примери

1. Ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ конвергира ако и само ако је $\alpha > 1$ јер то важи за интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$. Дакле, за свако $\alpha > 0$ ред даје један реалан број, па може да се дефинише функција (*Риманова*) $\zeta : (1, +\infty) \to R^+$ са

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

2. Ред $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^\alpha n}$ конвергира ако и само ако је $\alpha > 1$ јер то важи за интеграл $\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln^\alpha x}$.

АЛТЕРНАТИВНИ РЕДОВИ

- **Лајбницов критеријум**
- **Апсолутна конвергенција**

Лајбницов критеријум

Дефиниција Ред облика

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots ,$$

где је $a_n > 0$ за $n \in N$ је алтернативни ред.

За неке алтернативне редове постоје посебни критеријуми који дају довољне услове конвергенције.

Теорема (Лабницов критеријум) Алтенативни ред конвергира ако је $a_{n+1} \le a_n$ и $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Доказ. Како је $a_{n+1} \le a_n$, то је

$$s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \ge s_{2n}$$

и

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \le a_1,$$

па је низ (s_{2n}) конвергентан (растући и ограничен одоздго).
Из једнакости $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$ и претпоставке $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ следи да је

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n}.$$

Према томе, низ (s_n) конвергира, па и дати ред конвергира. ■

Примери

1. Алтернативни ред са $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ је конвергентан јер $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, а функција $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ је опадајућа за $x > 1$.
2. Алтернативни ред са $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ конвергира за $\alpha > 0$.
3. Алтернативни ред са $a_n = \dfrac{1}{n \ln^\alpha n}$ конвергира за $\alpha > 0$.

Апсолутна конвергенција

Ако алтернативни ред $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ конвергира,

ред $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ не мора да конвергира.

То је случај, на пример, за $a_n = \dfrac{1}{n}$.

Међутим, у супротном смеру важи следеће тврђење.

Теорема Нека је $a_n > 0$ за $n \in N$. Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ конвергира, тада конвергира и алтернативни ред $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$.

Доказ. Тврђење следи на основу Кошијевог критеријума конвергенције јер је

$$|s_n - s_m| \leq a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n,$$

где је (s_n) низ парцијалних сума алтернативног реда. ■

Дефиниција Алтернативни ред $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ је апсолутно конвергентан ако ред $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ конвергира, а условно конвергентан ако конвергира, а ред $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ не конвергира.

Примери

1. Алтернативни ред са $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ је апсолутно конвергентан.

2. Алтернативни ред са $a_n = \dfrac{1}{n}$ је условно конвергентан.

Појам апсолутне и условне конвергенције дефинише се слично и за произвољне редове.

У случају апсолутне конвергенције разна свостава коначних збирова се преносе и на редове, док у случају условне конвергенције то не мора да важи.

На пример, ако ред условно коневргира, онда се премештањем чланова реда може добити збир који је једнак произвољном реалном броју (*Риманова теорема*).

СТЕПЕНИ РЕДОВИ

- **Основни појмови**
- **Одређивање радијуса конвергенције**
- **Диференцирање и интеграције реда**

Основни појмови

За сваки реалан број x такав да је $0 < x < 1$ ред $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ конвергира (геометријски ред).

Наравно, у овом случају x^n можемо посматрати и као степену функцију на $(0,1)$, што значи да имамо ред степених функција.

Поменути ред 'конвергира'.

Међутим, исти ред на $(0,2)$ 'не конвергира' (на пример, за $x = 1$).

Дефиниција Ред облика $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, где су $x_0, a_1, a_2 \ldots$ дати реални бројеви а x реална променљива, је степени или потенцијални ред. Бројеви a_n су коефицијенти, а x_0 је тачка развоја степеног реда.

За $x_0 = 0$ имамо степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и довољно је разматрати овакве степене редове, јер се остали сменом $x - x_0 = y$ своде на њих.

За неке вредности променљиве x дати степени ред конвергира, а за неке дивергира.

На пример, степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ конвергира само за $x = 0$, јер за остале вредности општи члан не тежи нули.

Међутим, ред $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ конвергира за сваки реалан број x јер је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0,$$

па на основу Даламберовог критеријума ред апсолутно конвергира.

Теорема (Абелов став)

1. Ако $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ конвергира за $x = r$ $(r \neq 0)$, тада је он апсолутно конвергентан за свако x за које је $|x| < |r|$.

2. Ако је $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$ дивергентан за $x = r$, тада је он дивергентан за свако x за које је $|x| > |r|$.

Доказ. 1. Из претпоставке следи $a_n r^n \to 0$ када $n \to \infty$, па постоји број M такав да је $|a_n r^n| \leq M$ за $n \in N$. Тада је

$$|a_n x^n| = \left| a_n r^n \frac{x^n}{r^n} \right| = |a_n r^n| \left| \frac{x}{r} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{r} \right|^n .$$

Како геометријски ред $\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{x}{r} \right|^n$ конвергира за $|x| < |r|$, конвергира и дати ред.

2. Ако би ред био конвергентан за неко x за које је $|x| > |r|$, на основу 1. био би конвергентан и за $x = r$. ■

Из теореме следи да за сваки степени ред постоји реалан број r $(0 \leq r \leq +\infty)$ такав да важи:

1. ако је $|x| < r$, ред је конвергентан,
2. ако је $|x| > r$, ред је дивергентан.

Такав број r је *полупречник конвергенције* реда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Ако је $r > 0$, интервал $(-r, r)$ назива се *интервал конвергенције* тог реда.

За $r = 0$ ред конвергира само за $x = 0$, а ако је $r = +\infty$ ред конвергира на R.

На пример, за $a_n = n!$ је $r = 0$, а за $a_n = \dfrac{1}{n!}$ је $r = +\infty$.

Одређивање радијуса конвергенције

Полупречник конвергенције степеног реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ може да се одреди

помоћу Даламберовог критеријума ако постоји

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,$$

односно помоћу Кошијевог критеријума ако постоји

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

Из једнакости

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x|$$

следи да је ред конвергенатан за

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

и дивергентан за

$$|x| > \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}.$$

Према томе,

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Слично је и у случају Кошијевог критеријума,

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

а ако поменуте граничне вредности не постоје, важи следеће тврђење.

Теорема (Коши-Хадамарова теорема)

За степени ред $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ је

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Исто важи и за степени ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Примери

1. За $a_n = (1 + (-1)^n)^n$ је

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} (1 + (-1)^n) = 2,$$

па је $r = 1/2$.

2. За $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = e,$$

па је $r = e$.

3. За $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ је $r = 4$.

ИСПИТНА ПИТАЊА

1. Појам бесконачног бројног реда. Конвергенција реда.
2. Редови са ненегативним члановима. Критеријуми упоређивања.
3. Алтернативни редови. Лајбницов критеријум конвергенције.
4. Интегрални критеријум конвергенције бесконачног реда.
5. Степени редови. Радијус конвергенције степеног реда.

ПОЈМОВИ КОЈЕ ТРЕБА ЗНАТИ

1. Бесконачни ред
2. Општи члан бесконачног реда
3. Парцијална сума бесконачног реда
4. Конвергентан ред
5. Дивергентан ред
6. Хармонијски ред
7. Алтернативни ред
8. Апсолутно конвергентан ред
9. Условно конвергентан ред
10. Степени (потенцијални) ред
11. Полупречник конвергенције степеног реда
12. Интервал конвергенције степеног реда

ТВРЂЕЊА КОЈА ТРЕБА ЗНАТИ (са доказом)

Из претходних тема

8.1 Довољан услов за $\mathcal{R}$-интеграбилност функције

8.2 $\mathcal{R}$-интеграбилност непрекидне функције на $[a, b]$

8.3 Теорема о средњој вредности одређеног интеграла

8.4 Основна теорема диференцијалног и интегралног рачуна

9.1 Теорема о смени у неодређеном интегралу

9.2 Њутн Лајбницова формула

9.3 Теорема о смени у одређеном интегралу

11.1 Формуле за дужину лука криве (све три)

11.2 Формула за запремину ротационог тела

11.3 Формула за површину омотача ротационог тела

12.1 Теорема о средњој вредности двојног интеграла

12.2 Теорема о средњој вредности тројног интеграла

13.1 Површина дела површи дате са $z = f(x, y)$

Из ове теме

14.1 Неопходан услов за конвергенцију реда

14.2 Кошијев критеријум за конвергенцију реда

14.3 Критеријуми упоређивања (две теореме)

14.4 Даламберов критеријум

14.5 Кошијев критеријум

14.6 Интегрални критеријум

14.7 Лајбницов критеријум

14.8 Абелов став за степене редове