M2 - 13. ПРЕДАВАЊЕ

Драган Ђорић

Факултет организационих наука

2009/2010

ДВОЈНИ И ТРОЈНИ ИНТЕГРАЛИ

- Двојни интеграл
- Тројни интеграл
- Смене промењивих у двојном интегралу
- Смене промењивих у тројном интегралу
- Примене двојног и тројног интеграла

СМЕНЕ ПРОМЕНЉИВИХ
У ДВОЈНОМ ИНТЕГРАЛУ

- **Општи случај**
- **Поларне координате**

Општи случај смене у дв. инт.

Дат је интеграл

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

и дата је област $G \subset R^2$

која се функцијама φ и ψ пресликава у област D

на следећи начин:

$$x = \varphi(u,v), \qquad y = \psi(u,v),$$

при чему $(u,v) \in G$.

Може ли дати интеграл да се израчуна преко области G и променљивих u, v?

Претпоставимо

1. да је пресликавање $G \to D$ бијекција,
2. да функције φ, ψ имају у G непрекидне парцијалне изводе првог реда,
3. да је Јакобијан пресликавања

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix}$$

   различит од нуле у G.

Тада важи следеће тврђење које даје формулу за *смене променљивих* у двојном интегралу.

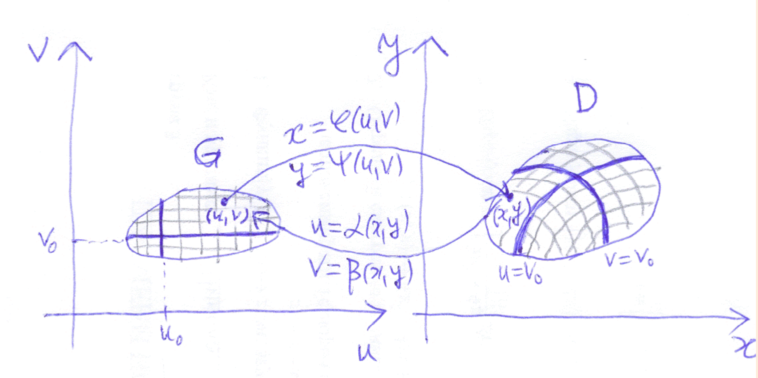
Теорема Ако $f \in \mathcal{R}(D)$ и ако пресликавање $G \to D$ испуњава услове 1.-3., тада је

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_G g(u,v)|J|dudv,$$

при чему је

$$g(u,v) = f(\varphi(u,v), \psi(u,v)).$$

Оваквом сменом се са декартових координата (x, y) прелази на нове координате (u, v) (у општем случају, криволинијске).



При томе је

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}$$

и

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}.$$

Коефицијент деформације је $|J|$, а елемент површине је дат са

$$d\sigma = dxdy = |J|dudv.$$

Некада је природније увести најпре смене $u = \alpha(x, y)$, $v = \beta(x, y)$, а затим из њих одредити функције φ и ψ за смене $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$. При томе, Јакобијан може да се добије и из релације

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1.$$

Примери

1. Нека је $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$ и нека је $f(x,y) = \left(\dfrac{x-y}{x+y+2}\right)^2$. Сменом $u = x+y$, $v = x-y$ поједностављује се и функција и област интеграције. Нова област интеграције је $G = [-1,1]^2$, а из $x = \dfrac{u+v}{2}$ и $y = \dfrac{u-v}{2}$ добијамо да је

$$J = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}, \qquad d\sigma = \frac{1}{2} du dv.$$

Према томе,

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_G \left(\frac{v}{u+2}\right)^2 \frac{1}{2} du dv = \int_{-1}^{1} v^2 dv \int_{-1}^{1} \frac{du}{(u+2)^2} = \frac{2}{9}.$$

2. Нека је D област ограничена линијама $y=0$, $y=x/2$, $x^2-y^2=1$ и $x^2-y^2=4$ и нека је $f(x,y)=y/x$. Сменом $u=x^2-y^2$, $v=y/x$ имамо

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ -y/x^2 & 1/x \end{vmatrix}=2-2\frac{y^2}{x^2}=2-2v^2,$$

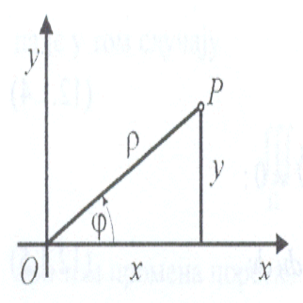
одакле добијамо $J=\dfrac{1}{2(1-v^2)}$. Како је нова област интеграције $G=[1,4]\times[0,1/2]$, то је

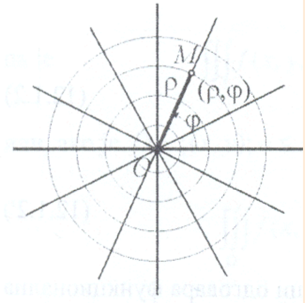
$$\iint_D \frac{y}{x}dxdy=\iint_G \frac{vdudv}{2(1-v^2)}=\frac{1}{2}\int_1^4 du\int_0^{1/2}\frac{vdv}{1-v^2}=-\frac{3}{4}\ln\frac{3}{4}.$$

Поларне координате

Поларне координате су (ρ, φ), при чему

$$\rho \in [0, \infty), \qquad \varphi \in [0, 2\pi].$$





Везе декартових (x, y) и поларних координата су

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi.$$

Јакобијан је дат са

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho,$$

а коефицијент деформације је $|J|$.

Елемент површине је

$$d\sigma = \rho d\rho d\varphi.$$

Према томе,

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_G g(\rho, \varphi)\rho d\rho d\varphi,$$

при чему је

$$g(\rho, \varphi) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi).$$

Примери

1. Нека је

$$I = \iint_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \qquad D = \{(x,y) \mid \pi^2/9 \le x^2+y^2 \le \pi^2\}.$$

   Увођењем поларних координата имамо да је

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/3}^{\pi} \sin\rho d\rho = 3\pi.$$

2. Нека је

$$I = \iint_D e^{-x^2-y^2}\sin(x^2+y^2)dxdy, \qquad D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le \pi\}.$$

   У поларним координатама је

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\pi}} e^{-\rho^2}\cos\rho^2 \rho d\rho = \frac{\pi}{2}(e^{-\pi}+1).$$

3. За

$$I=\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy, \qquad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq a^2, x\geq 0, y\geq 0\}$$

имамо

$$I=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^a \sqrt{a^2-\rho^2}\rho d\rho=\frac{\pi}{6}a^3.$$

Некада је згодно померити координатни почетак у тачку $M(x_0, y_0)$, односно увести смену

$$x = x_0 + \rho\cos\varphi, \qquad y = y_0 + \rho\sin\varphi,$$

при чему се јакобијан не мења.

У случају елиптичких области погодне су *уопштене поларне координате*

$$x = a\rho\cos\varphi, \qquad y = b\rho\sin\varphi,$$

при чему је $J = ab\rho$.

СМЕНЕ ПРОМЕНЉИВИХ
У ТРОЈНОМ ИНТЕГРАЛУ

- **Општи случај**
- **Цилиндричне координате**
- **Сферне координате**

Општи случај смене у тр. инт.

Дат је интеграл

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$$

и дата је област $G \subset R^3$

која се функцијама α, β и γ пресликава у област D

на следећи начин:

$$x = \alpha(u,v,w), \quad y = \beta(u,v,w), \quad z = \gamma(u,v,w),$$

при чему $(u,v,w) \in G$.

Може ли дати интеграл да се израчуна преко области G и промењљивих u,v,w?

Претпоставимо

1. да је пресликавање $G \to D$ бијекција,
2. да функције α, β, γ имају у G непрекидне парцијалне изводе првог реда,
3. да је Јакобијан пресликавања

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \alpha'_u & \alpha'_v & \alpha'_w \\ \beta'_u & \beta'_v & \beta'_w \\ \gamma'_u & \gamma'_v & \gamma'_w \end{vmatrix}$$

   различит од нуле у G.

Тада важи следеће тврђење које даје формулу за *смене променљивих* у тројном интегралу.

Теорема Ако $f \in \mathcal{R}(D)$ и ако пресликавање $G \to D$ испуњава услове 1.-3., тада је

$$\iiint_D f(x,y,z) = \iiint_G g(u,v,w)|J|dudvdw,$$

при чему је

$$g(u,v,w) = f(\alpha(u,v,w), \beta(u,v,w), \gamma(u,v,w)).$$

Оваквом сменом се са декартових координата (x, y, z) прелази на нове координате (u, v, w)
(у општем случају, криволинијске).

При томе је

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix}$$

и

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}.$$

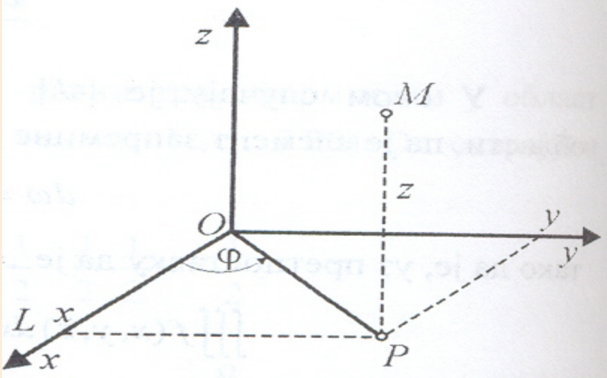
Коефицијент деформације је $|J|$, а елемент запремине је дат са

$$dV = dxdydz = |J|dudvdw.$$

Цилиндричне координате

Цилиндричне координате су (ρ, φ, z), при чему

$$\rho \in [0, \infty), \qquad \varphi \in [0, 2\pi], \qquad z \in R.$$



Везе декартових (x, y, z) и цилиндричних координата су

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi, \quad z = z.$$

Јакобијан је дат са

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho,$$

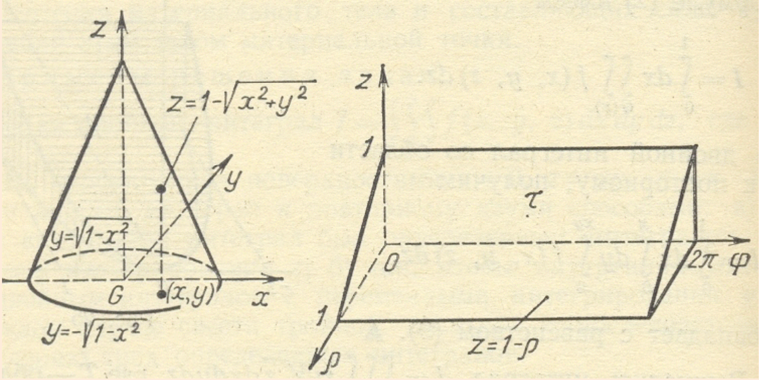
а коефицијент деформације је $|J|$.
Елемент запремине је $dV = \rho d\rho d\varphi d\theta$.
Према томе,

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_G g(\rho, \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz,$$

при чему је

$$g(\rho, \varphi, z) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z).$$

Пример Нека је $I = \iiint_T ((x+y)^2 - z)dxdydz$, где је T тело ограничено површима $z=0$ и $(z-1)^2 = x^2+y^2$.



Како је

$$T = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\},$$

где је D круг полупречника 1 с центром у координатном почетку, преласком на цилиндричне координате имамо да је

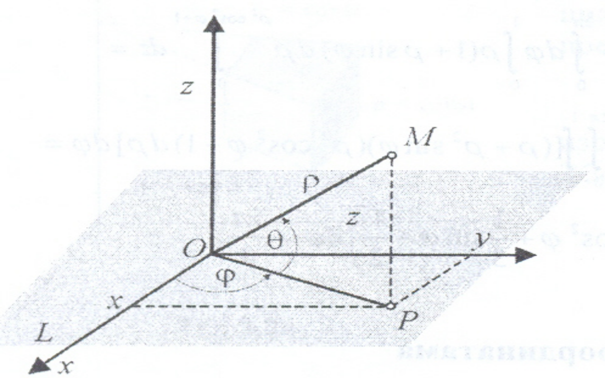
$$I = \iiint_T (\rho^2(1 + \sin 2\varphi) - z)\rho d\rho\varphi dz.$$

Свођењем тројног интеграла на троструки налазимо

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_0^{1-\rho} (\rho^2(1 + \sin 2\varphi) - z)\rho dz = \ldots = \frac{\pi}{60}.$$

Сферне координате

Сферне координате су (ρ, φ, θ), пру чему
$$\rho \in [0, \infty), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2].$$



Везе декартових (x, y, z) и сферних координата су

$$x = \rho \cos\theta \cos\varphi, \quad y = \rho \cos\theta \sin\varphi, \quad z = \rho \sin\theta.$$

Јакобијан је дат са

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta & 0 & \rho\cos\theta \end{vmatrix} \\ &= \rho^2\cos\theta(\cos^2\varphi\cos^2\theta + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \sin^2\theta\cos^2\varphi + \cos^2\theta\sin^2\varphi) \\ &= \rho^2\cos\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \\ &= \rho^2\cos\theta, \end{aligned}$$

а коефицијент деформације је $|J|$.

Елемент запремине је

$$dV = dxdydz = |J|d\rho d\varphi d\theta = \rho^2 \cos\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Према томе,

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_G g(\rho,\varphi,\theta)\rho^2 \cos\theta d\rho d\varphi d\theta,$$

при чему је

$$g(\rho,\varphi,\theta) = f(\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta).$$

Пример Нека је

$$I = \iiint_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz, \quad T = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Преласком на сферне координате имамо за нову област интеграције квадар $[0, 1] \times [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$, па је

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \ldots = \pi.$$

ПРИМЕНЕ ДВОЈНОГ И ТРОЈНОГ ИНТЕГРАЛА

- **Неке примене двојног интеграла**
- **Примена тројног интеграла**

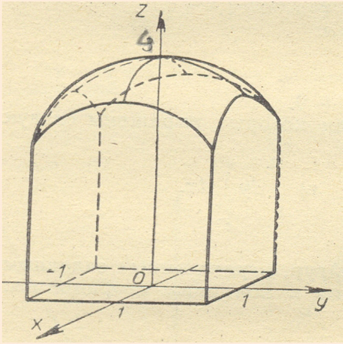
Примене двојног интеграла

Запремина цилиндричног тела

Запремина цилиндричног тела
чија је једна основа фигура D у равни Oxy,
а друга основа површ $z = f(x, y)$
дата је са
$$V = \iint_D f(x, y) dxdy.$$

Примери

1. Горња површ тела са слике је дата са $z = 4 - x^2 - y^2$.



Како је тело симетрично у односу на координатне равни xOz и yOz, то је

$$V = 4\int_0^1 dx \int_0^1 (4 - x^2 - y^2)dy = \ldots = \frac{40}{3}.$$

2. Ако је тело ограничено површима $z = x^2 + y^2$, $z = 2(x^2 + y^2)$, $y = x$ и $y^2 = x$, тада је његова запремина V дата са

$$V = V_1 - V_2,$$

где је

$$V_1 = \iint_D 2(x^2 + y^2)dxdy, \quad V_2 = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy$$

и где је

$$D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ x \le y \le \sqrt{x}\}.$$

Према томе,

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2)dy = \ldots = \frac{3}{35}.$$

Површина равanske фигуре

Површину $\sigma(D)$ фигуре D можемо добити ако у двојном интегралу на D узмемо функцију $f(x,y)=1$.

Дакле,

$$\sigma(D)=\iint_D dxdy.$$

Пример

Нека је D фигура ограничена параболом

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=\frac{x}{a}-\frac{y}{b}$$

и x осом. Увођењем смене

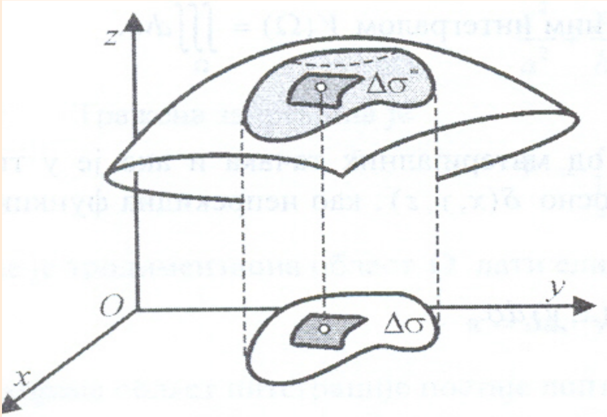
$$u=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}, \quad v=\frac{x}{a}-\frac{y}{b}$$

нова област G је ограничена параболом $u^2=v$ и правом $u=v$, при чему је $J=-\frac{ab}{2}$. Према томе,

$$\sigma(D)=\iint_D dxdy=\frac{ab}{2}\int_0^1 du\int_{u^2}^{u} dv=\ldots=\frac{ab}{12}.$$

Површина дела површи

Нека је површ дата са $z = f(x, y)$.



Подели Π области D одговара подела Π^* дате површи над облашћу D.

Ако су σ_k^* $(k = 1, 2, \ldots, n)$ површине делова поделе Π^*, тражена површина P је дата са

$$P = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^*,$$

под условом да све наведене површине постоје.

Међутим, површине σ_k^* није могуће у општем случају одредити, нити утврдити да ли постоје.

Уместо њих можемо узети површине P_k одговарајућих делова тангентних равни у изабраним тачкама делова површи.

Претпоставимо да је дата подела (Π, M_i) области D

и да је P_i површина дела тангентне равни у тачки M_i над делом D_i.

Нека је

$$P(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} P_i.$$

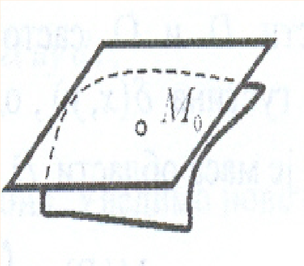
Дефиниција Ако постоји $\lim\limits_{\lambda(\Pi)\to 0} P(\Pi) = P$, тада је P површина посматраног дела дате површи.

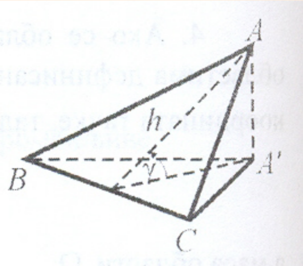
Теорема Ако $z'_x, z'_y \in C(D)$, тада површина дела površи над D постоји и дата је са

$$P = \iint_D \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dxdy.$$

Доказ. Једначина тангенте у $M_i(x_i, y_i, z_i)$ је

$$z - z_i = z'_x(M_i)(x - x_i) + z'_y(M_1)(y - y_i).$$





Како је угао γ између тангентне равни и равни xOy једнак углу између нормале тангентне равни и z осе и како је

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2(M_i) + z_y'^2(M_i)}},$$

то је

$$P_i = \frac{\sigma_i}{\cos\gamma} = \sqrt{1 + z_x'^2(M_i) + z_y'^2(M_i)}\,\sigma_i.$$

Збир $P(\Pi)$ је интегрална сума двојног интеграла за функцију

$$g = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}$$

на области D. Из претпоставке теореме следи да је g непрекидна на D, па интегрална сума конвергира интегралу. Према томе,

$$P = \lim_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(M_i)\sigma_i = \iint_D g(x,y)dxdy = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}dxdy. \qquad \blacksquare$$

Примери

1. Нека је P површина дела равни $z = y + 1$ над кругом $x^2 + y^2 \leq 1$. Како је $z'_x = 0$ и $z'_y = 1$, то је $\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{2}$, па је

$$P = \sqrt{2} \iint_{x^2+y^2\leq 1} dxdy = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho = \pi\sqrt{2}.$$

2. Нека је P површина дела површи $z = x^2 + y^2$ над кругом $x^2 + y^2 \leq 1$. Како је $z'_x = 2x$ и $z'_y = 2y$, то је

$$P = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2}\rho d\rho = \frac{\pi}{6}(5^{3/2} - 1).$$

Примена тројног интеграла

Ако је $f(x,y,z)=1$ на телу T,

тада је
$$S_n(f,\Pi)=\sigma(T)$$
за сваку поделу Π.

Према томе, запремина V мерљивог тела T је дата са
$$V=\iiint_T dxdydz.$$

Примери

1. Запремина V лопте $L : x^2+y^2+z^2 \le r^2$ може да се добије са
$$V = \iiint_L dxdydz.$$
Преласком на сферне координате имамо нову област интеграције
$$G = [0, r] \times [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2],$$
па je
$$\begin{aligned} V &= \iiint_G \rho^2 \cos\theta d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^r \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta \\ &= \frac{4}{3} r^3 \pi. \end{aligned}$$

2. Ако је T тело ограничено површима

$$x^2+y^2+z^2=16, \quad x^2+y^2+z^2=8z,$$

тада преласком на цилиндричне координате добијамо

$$V=\int_0^{2p} d\varphi \int_0^{2\sqrt{3}} \rho d\rho \int_{4-\sqrt{16-\rho^2}}^{\sqrt{16-\rho^2}} dz = \ldots = \frac{80}{3}\pi.$$

ИСПИТНА ПИТАЊА

1. Смена променљивих у двојном интегралу. Поларне координате.
2. Смена променљивих у тројном интегралу. Цилиндричне координате.
3. Смена променљивих у тројном интегралу. Сферне координате.
4. Примене двојног интеграла.
5. Примена тројног интеграла.

ПОЈМОВИ КОЈЕ ТРЕБА ЗНАТИ

1. Криволинијске координате
2. Коефицијент деформације
3. Уопштене поларне координате
4. Цилиндричне координате
5. Сферне координате
6. Површина дела површи

ТВРЂЕЊА КОЈА ТРЕБА ЗНАТИ (са доказом)

Из претходних тема

8.1 Довољан услов за $\mathcal{R}$-интеграбилност функције

8.2 $\mathcal{R}$-интеграбилност непрекидне функције на $[a, b]$

8.3 Теорема о средњој вредности одређеног интеграла

8.4 Основна теорема диференцијалног и интегралног рачуна

9.1 Теорема о смени у неодређеном интегралу

9.2 Њутн Лајбницова формула

9.3 Теорема о смени у одређеном интегралу

11.1 Формуле за дужину лука криве (све три)

11.2 Формула за запремину ротационог тела

11.3 Формула за површину омотача ротационог тела

12.1 Теорема о средњој вредности двојног интеграла

12.2 Теорема о средњој вредности тројног интеграла

Из ове теме

13.1 Површина дела површи дате са $z = f(x, y)$

ЧИЊЕНИЦЕ КОЈЕ ТРЕБА ЗНАТИ

1. Смена промењљивих у двојном интегралу
2. Везе декартових и поларних координата
3. Смена промењљивих у тројном интегралу
4. Везе декартових и цилиндричних координата
5. Везе декартових и сферних координата
6. Запремина цилиндричног тела
7. Површина раванске фигуре помоћу двојног интеграла
8. Запремина тела помоћу тројног интеграла