M2 - 12. ПРЕДАВАЊЕ

Драган Ђорић

Факултет организационих наука

2009/2010

ДВОЈНИ И ТРОЈНИ ИНТЕГРАЛИ

- Двојни интеграл
- Тројни интеграл
- Смене променљивих у двојном интегралу
- Смене променљивих у тројном интегралу
- Неке примене двојног интеграла
- Неке примене тројног интеграла

ДВОЈНИ ИНТЕГРАЛ

- **Дефиниција двојног интеграла**
- **Особине двојног интеграла**
- **Свођење двојног интеграла на двоструки**

Дефиниција двојног интеграла

Мотив и ознаке

Нека је:

$D \subset R^2$ – област (отворена или затворена) која има површину (мерљива)

$d = diam(D)$ – дијаметар области D дефинисан као супремум свих растојања између двеју тачака у D

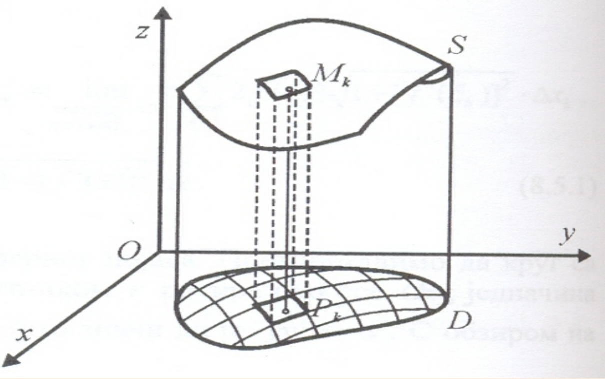
$\Pi = [D_1, D_2, \ldots, D_n]$ – подела области D, при чему је $D = \cup_{i=1}^{n} D_i$, а D_i и D_j немају заједничких унутрашњих тачака за $i \neq j$ и $D_1, \ldots, D_n$ су такође мерљиви делови (имају површину).

σ_k – површина од D_k $(k = 1, \ldots, n)$

$f : D \to R^+$ (слика)

m_i, M_i такви да $m_i \leq f(x,y) \leq M_i$ за $(x,y) \in D_i$

$$\underline{S}_n(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} m_i \sigma_i, \ \overline{S}_n(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} M_i \sigma_i$$



Ако је V запремина цилиндричног тела ограниченог
с доње стране облашћу D,
с горње стране графиком функције f,
очигледно је

$$\underline{S}_n \leq V \leq \overline{S}_n.$$

Ако је V запремина цилиндричног тела ограниченог
с доње стране облашћу D,
с горње стране графиком функције f,
очигледно је

$$\underline{S}_n \leq V \leq \overline{S}_n.$$

Можемо ли разлику између $\underline{S}_n$ и $\overline{S}_n$ учинити произвољно малом?

Дефиниција двојног интеграла

Нека $f : D \to R$ и нека је:

$\lambda(\Pi)$ – параметар поделе области D дат са

$$\lambda = \max\{d_1, d_2, \ldots, d_n\},$$

где је $d_i = diam(D_i)$ за $i = 1, 2, \ldots, n$

$S_n(f, \Pi, A_i)$ – интегрална сума функције f дата са

$$S_n(f, \Pi, A_i) = \sum_{i=1}^{n} f(A_i)\sigma_i, \qquad A_i \in D_i$$

Дефиниција двојног интеграла

Нека $f : D \to R$ и нека је:

$\lambda(\Pi)$ – параметар поделе области D дат са

$$\lambda = \max\{d_1, d_2, \ldots, d_n\},$$

где је $d_i = diam(D_i)$ за $i = 1, 2, \ldots, n$

$S_n(f, \Pi, A_i)$ – интегрална сума функције f дата са

$$S_n(f, \Pi, A_i) = \sum_{i=1}^{n} f(A_i)\sigma_i, \qquad A_i \in D_i$$

Ако избор тачака није битан или је фиксиран, интегралну суму можемо записати краће са $S_n(f, \Pi)$.

Понекад, ради краћег записа, користимо и ознаку S_n.

Дефиниција Број I је двојни интеграл функције f на области D ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta(\varepsilon) > 0$ тако да за сваку поделу Π за коју је $\lambda(\Pi) < \delta$ и сваки избор тачака $M_i \in D_i$ важи

$$|S_n(f, \Pi) - I| < \varepsilon.$$

Функција f је интегранд, а D област интеграције.

Дефиниција Број I је двојни интеграл функције f на области D ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta(\varepsilon) > 0$ тако да за сваку поделу Π за коју је $\lambda(\Pi) < \delta$ и сваки избор тачака $M_i \in D_i$ важи

$$|S_n(f, \Pi) - I| < \varepsilon.$$

Функција f је интегранд, а D област интеграције.

Каже се још и да је I гранична вредност интегралне суме S_n кад $\lambda(\Pi) \to 0$ и означава са

$$I = \lim_{\lambda(\Pi) \to 0} S_n(f, \Pi) = \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_D f(M) d\sigma.$$

Дефиниција Број I је двојни интеграл функције f на области D ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta(\varepsilon) > 0$ тако да за сваку поделу Π за коју је $\lambda(\Pi) < \delta$ и сваки избор тачака $M_i \in D_i$ важи

$$|S_n(f,\Pi) - I| < \varepsilon.$$

Функција f је интегранд, а D област интеграције.

Каже се још и да је I гранична вредност интегралне суме S_n кад $\lambda(\Pi) \to 0$ и означава са

$$I = \lim_{\lambda(\Pi)\to 0} S_n(f,\Pi) = \iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_D f(M)d\sigma.$$

За функцију f за коју постоји двојни интеграл над D кажемо да је $\mathcal{R}$ (Риман) интеграбилна на D.

Скуп свих таквих функција означавамо са $\mathcal{R}(D)$.

Примери

1. Ако је $f(x,y)=0$ на D, тада је $S_n(f,\Pi)=0$ за сваку поделу Π, па је $\iint_D f(x,y)d\sigma = 0$.

2. Ако је $f(x,y)=1$ на D, тада је $S_n(f,\Pi)=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i=\sigma(D)$, где је $\sigma(D)$ површина области D.

3. Ако је $f(M)=1$ када тачка M има рационалне координате и $f(M)=0$ када тачка M има ирационалне координате и ако су (Π, M_i) и (Π, N_i) поделе у којима тачке M_i имају рационалне, а тачке N_i ирационалне координате, тада је

$$S_n(f,\Pi,M_i)=\sigma(D), \quad S_n(f,\Pi,N_i)=0.$$

Према томе, функција f нема двојни интеграл на области D.

Класе интеграбилних функција

Потребан услов за интеграбилност функције је њена ограниченост.

Класе интеграбилних функција

Потребан услов за интеграбилност функције је њена ограниченост.

Теорема Ако $f \in \mathcal{R}(D)$, онда је f ограничена на D.

Класе интеграбилних функција

Потребан услов за интеграбилност функције је њена ограниченост.

Теорема Ако $f \in \mathcal{R}(D)$, онда је f ограничена на D.

Нека је f ограничена функција на D и нека је

$$m_i = \inf_{P \in D_i} f(P), \quad M_i = \sup_{P \in D_i} f(P), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Теорема (*Веза са почетним мотивом*) Ограничена функција f је интеграбилна на D ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји подела Π таква да је

$$\overline{S}_n - \underline{S}_n < \varepsilon.$$

Ако је D затворена област, довољан услов за интеграбилност функције f је њена непрекидност.

Теорема Ако је функција $f : D \to R$ непрекидна на затвореној области D, онда $f \in \mathcal{R}(D)$.

Ако је D затворена област, довољан услов за интеграбилност функције f је њена непрекидност.

Теорема Ако је функција $f : D \to R$ непрекидна на затвореној области D, онда $f \in \mathcal{R}(D)$.

Као и код одређеног интеграла постоје и прекидне функције које су $\mathcal{R}$ интеграбилне.

Особине двојног интеграла

За двојни интеграл важе тврђења слична тврђењима за одређени интеграл.

Теорема (*Линеарност*) Ако $f, g \in \mathcal{R}(D)$ и $\alpha, \beta \in R$, тада $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(D)$, при чему је

$$\iint_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)) d\sigma = \alpha \iint_D f(x,y) d\sigma + \beta \iint_D g(x,y) d\sigma.$$

Особине двојног интеграла

За двојни интеграл важе тврђења слична тврђењима за одређени интеграл.

Теорема (*Линеарност*) Ако $f, g \in \mathcal{R}(D)$ и $\alpha, \beta \in R$, тада $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(D)$, при чему је

$$\iint_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)) d\sigma = \alpha \iint_D f(x,y) d\sigma + \beta \iint_D g(x,y) d\sigma.$$

Теорема (*Адитивност*) Ако $f \in \mathcal{R}(D)$ и ако је $D = A \cup B$, при чему A и B немају заједничких унутрашњих тачака, тада је

$$\iint_D f(x,y) d\sigma = \iint_A f(x,y) d\sigma + \iint_B f(x,y) d\sigma.$$

Теорема 1. Ако $f \in \mathcal{R}(D)$ и $f(P) \geq 0$, тада $\iint_D f(P)d\sigma \geq 0$.

2. Ако $f, g \in \mathcal{R}(D)$ и $f(P) \leq g(P)$ за $P \in D$, тада je

$$\iint_D f(P)d\sigma \leq \iint_D g(P)d\sigma.$$

Теорема 1. Ако $f \in \mathcal{R}(D)$ и $f(P) \geq 0$, тада $\iint_D f(P)d\sigma \geq 0$.

2. Ако $f, g \in \mathcal{R}(D)$ и $f(P) \leq g(P)$ за $P \in D$, тада је

$$\iint_D f(P)d\sigma \leq \iint_D g(P)d\sigma.$$

Доказ. 1. Из $f(P) \geq 0$ следи да је $S_n(f, \Pi) \geq 0$ за сваку поделу Π, па и у случају када $\lambda(\Pi) \to 0$.

2. Како је $g(P) - f(P) \geq 0$, из 1. следи

$$\iint_D g(P)d\sigma - \iint_D f(P)d\sigma = \iint_D (g(P) - f(P))d\sigma \geq 0. \qquad \blacksquare$$

Теорема (*Процена вредности двојног интеграла*) Ако $f \in \mathcal{R}(D)$ и ако је $m \leq f(P) \leq M$ за $P \in D$, тада

$$m\sigma(D) \leq \iint_D f(P)d\sigma \leq M\sigma(D),$$

где је $\sigma(D)$ површина области D.

Теорема (*Процена вредности двојног интеграла*) Ако $f \in \mathcal{R}(D)$ и ако је $m \leq f(P) \leq M$ за $P \in D$, тада

$$m\sigma(D) \leq \iint_D f(P)d\sigma \leq M\sigma(D),$$

где је $\sigma(D)$ површина области D.

Доказ. Како је $f(P) \geq m$, применом претходне теореме следи да је

$$\iint_D f(P)d\sigma \geq \iint_D md\sigma = m\iint_D d\sigma = m\sigma(D).$$

Слично, из $M \geq f(P)$ добијамо

$$\iint_D f(P)d\sigma \leq \iint_D Md\sigma = M\iint_D d\sigma = M\sigma(D). \qquad \blacksquare$$

Теорема (*Средња вредност двојног интеграла*) Ако је f непрекидна функција на затвореној области D, тада постоји унутрашња тачка Q области D, таква да је

$$\iint_D f(P)d\sigma = f(Q) \cdot \sigma(D).$$

Теорема (*Средња вредност двојног интеграла*) Ако је f непрекидна функција на затвореној области D, тада постоји унутрашња тачка Q области D, таква да је

$$\iint_D f(P)d\sigma = f(Q)\cdot\sigma(D).$$

Доказ. Ако су m и M најмања и највећа вредност функције f на D, онда из претходне теореме следи да је

$$m \le \frac{1}{\sigma(D)}\iint_D f(P)d\sigma \le M.$$

Како постоји тачка Q унутрашњости области D (зашто?) таква да је

$$f(Q) = \frac{1}{\sigma(D)}\iint_D f(P)d\sigma,$$

то је

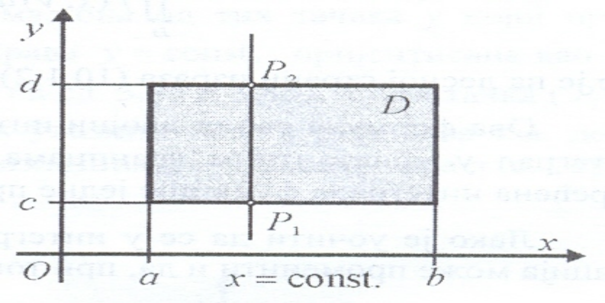
$$\iint_D f(P)d\sigma = f(Q)\cdot\sigma(D). \qquad \blacksquare$$

Свођење дв. инт. на двоструки

Правоугаона област

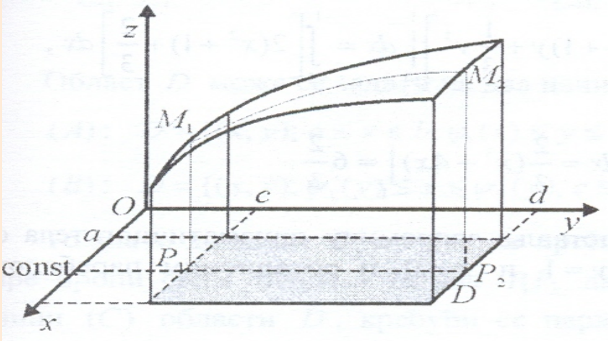
Нека је област интеграције правоугаоник,

$$D = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\}.$$



Имајући у виду геометријско тумачење двојног интеграла (запремина), видимо да би један начин интеграције могао бити дат са

$$I = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$



То се може и строго доказати полазећи од дефиниције двојног интеграла. Нека је

$$I(x) = \int_c^d f(x,y)dy, \qquad J(y) = \int_a^b f(x,y)dx.$$

Теорема (*Свођење двојног на двоструки интеграл*) Ако $f \in \mathcal{R}([a,b] \times [c,d])$, $I \in \mathcal{R}[a,b]$ и $J \in \mathcal{R}[c,d]$, тада важи

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Дакле,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b I(x)dx = \int_c^d J(y)dy$$

Поновљени једноструки интеграли у претходном тврђењу се пишу и у облику

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy, \qquad \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$$

и зову *двоструки интеграли.*

Ако је

$$f(x,y) = g(x)h(y),$$

тада је

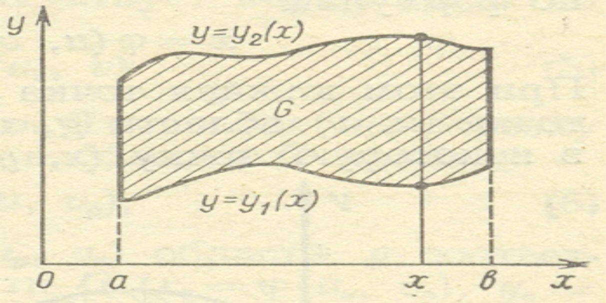
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b g(x)dx \cdot \int_c^d h(y)dy.$$

Трапоезоидна област

Нека је област интеграције y-трапезоидна,

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ \ y_1(x) \leq y(x) \leq y_2(x)\},$$

где су y_1 и y_2 непрекидне функције на $[a, b]$.



Теорема Ако $f \in \mathcal{R}(D)$ и ако за свако $x \in [a,b]$ постоји интеграл

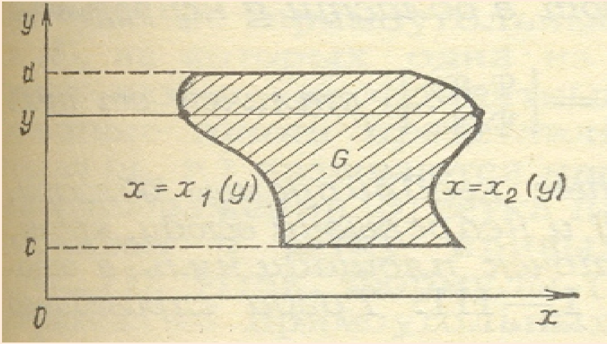
$$I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy,$$

тада је

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b I(x)dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Слично, за x-трапезоидну област D важи

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$



Произвољна област

Ако област D може да се разложи на трапезоидне области, онда за израчунавање двојног интеграла дате функције на области D могу да се примене претходне формуле.

На свакој трапезоидној области двојни интеграл се рачуна свођењем на двоструки, а затим се применом теореме о адитивности налази двојни интеграл на области D.

Примери

1. Ако је $D = [0,1] \times [0,1]$, тада је

$$\iint_D \frac{x^2}{1+y^2} dxdy = \int_0^1 x^2 dx \cdot \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \cdot \arctan y \Big|_0^1 = \frac{\pi}{12}.$$

2. Нека је $D = [0, \pi/2] \times [0,1]$ и $f(x,y) = xy\sin(xy^2)$. Тада је

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^1 xy\sin(xy^2)dy.$$

Како је

$$\int_0^1 2xy\sin(xy^2)dy = -\cos(xy^2)\Big|_0^1 = 1 - \cos x,$$

то је

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos x)dx = \frac{1}{2}(x - \sin x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

3. Ако је D фигура ограничена правом $y = x$ и кривом $y = x^2$, тада је

$$\iint_D (x + y^2) dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x + y^2) dy.$$

Како је

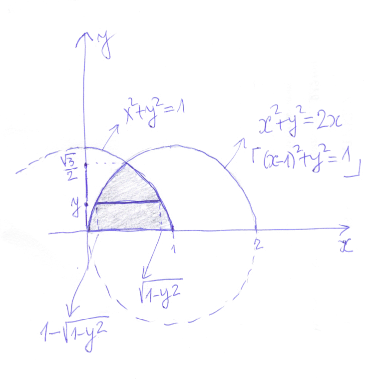
$$\int_{x^2}^x (x + y^2) dy = xy + \frac{1}{3} y^3 \Big|_{x^2}^x = x^2 - \frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{3} x^6,$$

то је

$$\iint_D (x + y^2) dxdy = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{3} x^6 \right) dx = \frac{5}{42}.$$

4. Ако je $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1, x^2+y^2 \le 2x, y \ge 0\}$, тада je

$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^{\sqrt{3}/2} y\,dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}/2} (y-2y\sqrt{1-y^2})\,dy.$$



ТРОЈНИ ИНТЕГРАЛ

- **Дефиниција тројног интеграла**
- **Особине тројног интеграла**
- **Свођење тројног интеграла на троструки**

Дефиниција тројног интеграла

Нека је:

$T \subset R^3$ – област (отворена или затворена) која има запремину (мерљива)

$d = diam(T)$ – дијаметар области T дефинисан као супремум свих растојања (у простору) између двеју тачака у T

$\Pi = [T_1, T_2, \ldots, T_n]$ – подела области T, при чему је $T = \cup_{i=1}^{n} T_i$, а T_i и T_j немају заједничких унутрашњих тачака за $i \neq j$ и $T_1, \ldots, T_n$ су такође мерљиви делови (имају запремину).

V_k – запремина од T_k $(k = 1, \ldots, n)$

$\lambda(\Pi)$ – параметар поделе области T дат са $\lambda = \max\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$, где је $d_i = diam(T_i)$ за $i = 1, 2, \ldots, n$

$S_n(f, \Pi, M_i)$ – интегрална сума функције f дата са

$$S_n(f, \Pi, M_i) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) V_i, \qquad M_i \in T_i$$

Када је јасно које су тачке M_i и која је подела Π, користе се и ознаке $S_n(f, \Pi)$ и S_n.

$S_n(f, \Pi, M_i)$ – интегрална сума функције f дата са

$$S_n(f, \Pi, M_i) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) V_i, \qquad M_i \in T_i$$

Када је јасно које су тачке M_i и која је подела Π, користе се и ознаке $S_n(f, \Pi)$ и S_n.

Дефиниција Број I је тројни интеграл функције f на области T ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta(\varepsilon) > 0$ тако да за сваку поделу Π за коју је $\lambda(\Pi) < \delta$ и сваки избор тачака $M_i \in T_i$ важи

$$|S_n(f, \Pi) - I| < \varepsilon.$$

Функција f је интегранд, а T област интеграције.

Каже се још и да је I гранична вредност интегралне суме S_n кад $\lambda(\Pi) \to 0$ и означава са

$$I = \lim_{\lambda(\Pi)\to 0} S_n(f,\Pi) = \iiint_T f(P)dV = \iiint_T f(x,y,z)dxdydz.$$

Каже се још и да је I гранична вредност интегралне суме S_n кад $\lambda(\Pi) \to 0$ и означава са

$$I = \lim_{\lambda(\Pi)\to 0} S_n(f, \Pi) = \iiint_T f(P)dV = \iiint_T f(x, y, z)dxdydz.$$

За функцију f за коју постоји тројни интеграл над T кажемо да је $\mathcal{R}$ (Риман) интеграбилна на T.

Скуп свих таквих функција означавамо са $\mathcal{R}(T)$.

Каже се још и да је I гранична вредност интегралне суме S_n кад $\lambda(\Pi) \to 0$ и означава са

$$I = \lim_{\lambda(\Pi)\to 0} S_n(f, \Pi) = \iiint_T f(P)dV = \iiint_T f(x, y, z)dxdydz.$$

За функцију f за коју постоји тројни интеграл над T кажемо да је $\mathcal{R}$ (Риман) интеграбилна на T.

Скуп свих таквих функција означавамо са $\mathcal{R}(T)$.

Примери који су наведени код двојног интеграла могу се узети и за примере тројног интеграла ако се уместо функције две промењиве узме функција три промењиве.

Као и код двојног интеграла, могу се издвојити класе функција које имају тројни интеграл.

На пример, важи следеће тврђење.

Теорема Ако је функција $f : T \to R$ непрекидна на затвореној области $T \subset R^3$, онда $f \in \mathcal{R}(T)$.

Особине тројног интеграла

За тројни интеграл важе тврђења аналогна тврђењима за двојни интеграл.

Теорема (*Линеарност*) Ако $f, g \in \mathcal{R}(T)$ и $\alpha, \beta \in R$, тада $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(T)$, при чему је

$$\iiint_T (\alpha f(P) + \beta g(P))dV = \alpha \iiint_T f(P)dV + \beta \iiint_T g(P)dV.$$

Особине тројног интеграла

За тројни интеграл важе тврђења аналогна тврђењима за двојни интеграл.

Теорема (*Линеарност*) Ако $f, g \in \mathcal{R}(T)$ и $\alpha, \beta \in R$, тада $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(T)$, при чему је

$$\iiint_T (\alpha f(P) + \beta g(P)) dV = \alpha \iiint_T f(P) dV + \beta \iiint_T g(P) dV.$$

Теорема (*Адитивност*) Ако $f \in \mathcal{R}(T)$ и ако је $T = A \cup B$, при чему A и B немају заједничких унутрашњих тачака, тада је

$$\iiint_T f(P) dV = \iiint_A f(P) dV + \iiint_B f(P) dV.$$

Теорема 1. Ако $f \in \mathcal{R}(T)$ и $f(P) \geq 0$, тада $\iiint_T f(P)dV \geq 0$.

2. Ако $f, g \in \mathcal{R}(T)$ и $f(P) \leq g(P)$ за $P \in T$, тада је

$$\iiint_T f(P)dV \leq \iiint_T g(P)dV.$$

Теорема 1. Ако $f \in \mathcal{R}(T)$ и $f(P) \geq 0$, тада $\iiint_T f(P)dV \geq 0$.

2. Ако $f, g \in \mathcal{R}(T)$ и $f(P) \leq g(P)$ за $P \in T$, тада је

$$\iiint_T f(P)dV \leq \iiint_T g(P)dV.$$

Доказ. 1. Из $f(P) \geq 0$ следи да је $S_n(f, \Pi) \geq 0$ за сваку поделу Π, па и у случају када $\lambda(\Pi) \to 0$.

2. Како је $g(P) - f(P) \geq 0$, из 1. следи

$$\iiint_T g(P)dV - \iiint_T f(P)dV = \iiint_T (g(P) - f(P))dV \geq 0. \qquad \blacksquare$$

Теорема (*Процена вредности тројног интеграла*) Ако $f \in \mathcal{R}(T)$ и ако је $m \leq f(P) \leq M$ за $P \in T$, тада

$$m \cdot V(T) \leq \iiint_T f(P) dV \leq M \cdot V(T),$$

где је $V(T)$ запремина области T.

Теорема (*Процена вредности тројног интеграла*) Ако $f \in \mathcal{R}(T)$ и ако је $m \leq f(P) \leq M$ за $P \in T$, тада

$$m \cdot V(T) \leq \iiint_T f(P) dV \leq M \cdot V(T),$$

где је $V(T)$ запремина области T.

Доказ. Како је $f(P) \geq m$, применом претходне теореме следи да је

$$\iiint_T f(P) dV \geq \iiint_T m dV = m \iiint_T dV = m \cdot V(T).$$

Слично, из $M \geq f(P)$ добијамо

$$\iiint_T f(P) dV \leq \iiint_T M dV = M \iiint_T dV = M \cdot V(T). \qquad \blacksquare$$

Теорема (*Средња вредност тројног интеграла*) Ако је f непрекидна функција на затвореној области T, тада постоји унутрашња тачка Q области T, таква да је

$$\iiint_T f(P)dV = f(Q)\cdot V(T).$$

Теорема (*Средња вредност тројног интеграла*) Ако је f непрекидна функција на затвореној области T, тада постоји унутрашња тачка Q области T, таква да је

$$\iiint_T f(P)dV = f(Q) \cdot V(T).$$

Доказ. Ако су m и M најмања и највећа вредност функције f на T, онда из претходне теореме следи да је

$$m \leq \frac{1}{V(T)} \iiint_T f(P)dV \leq M.$$

Како постоји тачка Q унутрашњости области T (зашто?) таква да је

$$f(Q) = \frac{1}{V(T)} \iiint_T f(P)dV,$$

то је

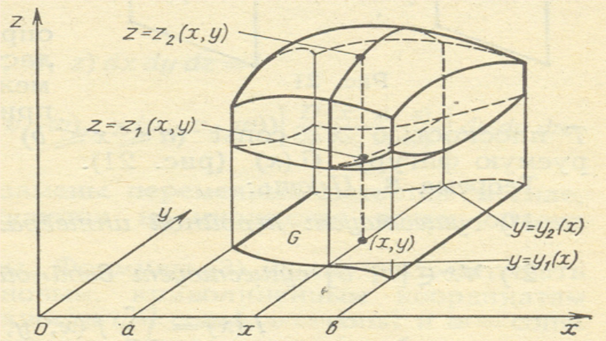
$$\iiint_T f(P)dV = f(Q) \cdot V(T). \qquad \blacksquare$$

Свођење тр. инт. на троструки

Нека је област интеграције T одређена са

$$T = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ z_1(x, y) \leq z(x, y) \leq z_2(x, y)\},$$

где су z_1 и z_2 непрекидне функције на $D \subset R^2$.



Теорема Ако $f \in \mathcal{R}(T)$ и ако за свако $(x,y) \in D$ постоји интеграл

$$I(x,y) = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz,$$

тада је

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \iint_D I(x,y)dxdy,$$

односно

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Ако је D трапезоидна област, на пример,

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ y_1 \leq y \leq y_2\},$$

тада је

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

Ако је D трапезоидна област, на пример,

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ y_1 \leq y \leq y_2\},$$

тада је

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

Према томе, ако се двојни интеграл своди на двоструки, тада се тројни интеграл за претпостављено тело T своди на троструки интеграл.

Исто важи и ако област D може да се разложи на трапезоидне области, као и ако област интеграције тројног интеграла може да се разложи на области типа претпостављене области T.

Примери

1. Нека је $T = [0,1]^3$ и $f(x,y,z) = x+y+z$. Тада је

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x+y+z)dz.$$

Како је

$$\int_0^1 (x+y+z)dz = xz + yz + \frac{z^2}{2}\Big|_0^1 = x + y + \frac{1}{2}$$

и

$$\int_0^1 \left(x + y + \frac{1}{2}\right) dy = xy + \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2}\Big|_0^1 = x + 1,$$

то је

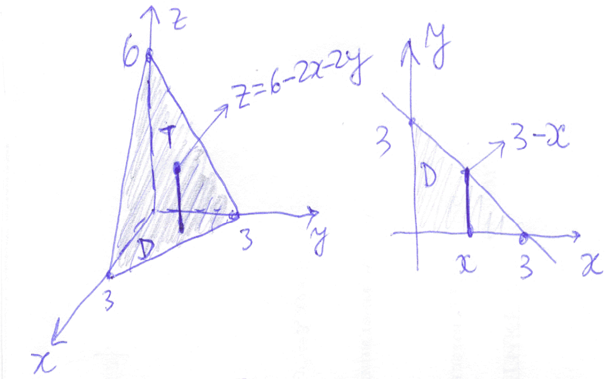
$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \int_0^1 (x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x\Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

Слично за $T = [0,a] \times [0,b] \times [0,c]$ добијамо

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x+y+z)dxdydz = \frac{abc}{2}(a+b+c).$$

2. Нека је T тело ограничено координатним равнима и равни $2x+2y+z-6=0$. Тада је

$$\iiint_T x\,dx\,dy\,dz = \int_0^3 x\,dx \int_0^{3-x} dy \int_0^{6-2x-2y} dz = \ldots = \frac{27}{4}.$$



3. Нека је T тело ограничено површима $y = x^2$, $x = y^2$, $z = 0$ и $z = xy$. Тада је

$$\iiint_T xyz dx dy dz = \int_0^1 x dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y dy \int_0^{xy} z dz = \ldots = \frac{1}{96}.$$

ИСПИТНА ПИТАЊА

1. Дефиниција и особине двојног интеграла
2. Дефиниција и особине тројног интеграла
3. Свођење двојног интеграла на двоструки

ПОЈМОВИ КОЈЕ ТРЕБА ЗНАТИ

1. Дијаметар области
2. Интегрална сума (за двојни интеграл)
3. Двојни интеграл
4. Интегрална сума (за тројни интеграл)
5. Тројни интеграл

ТВРЂЕЊА КОЈА ТРЕБА ЗНАТИ (са доказом)

Из претходних тема

8.1 Довољан услов за $\mathcal{R}$-интеграбилност функције

8.2 $\mathcal{R}$-интеграбилност непрекидне функције на $[a,b]$

8.3 Теорема о средњој вредности одређеног интеграла

8.4 Основна теорема диференцијалног и интегралног рачуна

9.1 Теорема о смени у неодређеном интегралу

9.2 Њутн Лајбницова формула

9.3 Теорема о смени у одређеном интегралу

11.1 Формуле за дужину лука криве (све три)

11.2 Формула за запремину ротационог тела

11.3 Формула за површину омотача ротационог тела

Из ове теме

12.1 Теорема о средњој вредности двојног интеграла

12.2 Теорема о средњој вредности тројног интеграла

ЧИЊЕНИЦЕ КОЈЕ ТРЕБА ЗНАТИ

1. $f \in \mathcal{R}(D) \ \Rightarrow \ f$ је ограничена на D
2. $f \in \mathcal{R}(D)$ ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји подела за коју је $\underline{S}_n - \overline{S}_n < \varepsilon$
3. $f \in C(D) \ \Rightarrow \ f \in \mathcal{R}(D)$ $\big(D$ - затворена област$\big)$
4. Својства двојног интеграла (адитивност, линеарност, процена вредности)
5. Свођење двојног интеграла на двоструки
6. Одговарајуће чињенице 1.-4. за тројни интеграл
7. Свођење тројног интеграла на троструки