ПАРЦИЈАЛНА ИНТЕГРАЦИЈА У ОДРЕЂЕНОМ ИНТЕГРАЛУ

Задаци са решењима

Драган Ђорић

Ако функције u и v имају непрекидне изводе на $[a,b]$, тада постоје интеграли $\int_a^b uv'dx$ и $\int_a^b u'vdx$, па из једнакости $(uv)' = u'v + uv'$ и Њутн-Лајбницове формуле следи да је

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Ова једнакост је позната као *метод парцијалне интеграције за одређени интеграл*, а може да важи и при слабијим (блажим) условима. На пример, за интеграл $\int_0^1 \arcsin x dx$ нису испуњени наведени услови за парцијалну интеграцију у случају да је $u = \arcsin x$ и $dv = dx$, јер функција u није непрекидно диференцијабилна на $[0,1]$. Међутим, важи једнакост[1]

$$\int_0^1 \arcsin x dx = x\arcsin x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Парцијална интеграција даје могућност да се интеграл функције $f = uv'$ добије налажењем интеграла функције $u'v$. Наравно, ово има смисла уколико је лакше одредити примитивну функцију за $u'v$ нега за функцију uv'.

Израчунати дати интеграл.

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2 \sin x dx.$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx,\ n \in \mathbb{N}.$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \sin^2 x dx.$

[1] За свако $\varepsilon > 0$ испуњени су услови за парцијалну интеграциију на $[0, 1-\varepsilon]$, што значи да је

$$\int_0^{1-\varepsilon} \arcsin x dx = x\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} - \int_0^{1-\varepsilon} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Како интеграл $\int_0^1 \arcsin x dx$ постоји (интегранд је непрекидна функција на $[0,1]$) и како је примитивна функција $F(x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ непрекидна на $[0,1]$, то је

$$\int_0^1 \arcsin x dx = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_0^{1-\varepsilon} \arcsin x dx = \lim_{\varepsilon\to 0_+} (F(1-\varepsilon) - F(0)) = F(1) - F(0).$$

4. $\displaystyle\int_0^1 \sin(\ln x)dx.$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi^2/4} \sin\sqrt{x}dx.$

6. $\displaystyle\int_0^{\pi^2/4} x\sin\sqrt{x}dx.$

7. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx.$

8. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} xe^x \sin x dx.$

9. $\displaystyle\int_{-2\sqrt{3}}^{2} \frac{dx}{(4+x^2)^2}.$

10. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$

11. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{xdx}{\cos^4 x}.$

12. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx.$

13. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

14. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx.$

15. $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1+4x^2}dx.$

16. Доказати да је $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{n-1} x\cos(n+1)xdx = 0,$ где је $n \in \mathbb{N}$.

17. Доказати да је $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^{n-1} x\sin(n+1)xdx = 0,$ где је $n \in \mathbb{N}$.

18. Доказати да је $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^{n-1} x\cos(n+1)xdx = 0,$ где је $n \in \mathbb{N}$.

19. Доказати да је

$$\int_a^b xf''(x)dx = bf'(b) - af'(a) + f(a) - f(b)$$

ако функција f има непрекидан други извод на $[a,b]$.

20. Нека функција f има непрекидан трећи извод на $[a,b]$ и нека је $I = \displaystyle\int_a^b xf''(x)dx$ и $J = \displaystyle\int_a^b x^2 f'''(x)dx$. Доказати да је $I + 2J = b^2 f''(b) - a^2 f''(a)$.

Интегранд типа $f(x) = R(x)\arctan^k x,\ k \in \mathbb{N}$. У неким случајевима за функцију f која је овог типа (где је R рационална функција) интеграл $\int_a^b f(x)dx$ може да се добије применом парцијалне интеграције, при чему се узима $u = \arctan^k(x)$. За $k > 1$ парцијалну интеграцију треба применити више пута. На пример, такви случајеви су када је $R(x)$ полином.

Исто тако, постоје једноставни примери функције овог типа за које интеграл не може да се добије помоћу парцијалне интеграције. На пример, када на интеграл $\int_0^1 \arctan^2 x dx$ два пута применимо парцијалну интеграцију добијамо да је

$$\int_0^1 \arctan^2 x dx = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi \ln 2}{4} + \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx.$$

Ако сада на овај нови интеграл применимо парцијалну интеграцију, враћамо се на почетни интеграл (вртимо се у круг). Другим методама (помоћу редова) добија се да је

$$\int_0^1 \arctan^2 x dx = \frac{1}{16}\pi(\pi + \ln 16) - C,$$

где је C константа Каталана, $C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

Израчунати дати интеграл.

21. $\int_0^1 \arctan x dx.$

22. $\int_0^1 x \arctan x dx.$

23. $\int_0^1 x^2 \arctan x dx.$

24. $\int_0^1 x^3 \arctan x dx.$

25. $\int_0^1 x^4 \arctan x dx.$

26. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\arctan x}{x^2} dx.$

27. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\arctan x}{x^3} dx.$

28. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\arctan x}{x^4} dx.$

29. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\arctan x}{x^5} dx.$

30. $\int_0^1 x\cdot\arctan^2 x dx.$

31. Нека је $I=\int_0^1 x\arctan^3 x dx$ и $J=\int_0^1 \arctan^2 x dx$. Доказати да је $I+\frac{3}{2}J=\left(\frac{\pi}{4}\right)^3$.

Интегранд типа $f(x)=R(x)\arctan S(x)$. И за функцију f овог типа постоје случајеви рационалних функција R и S за које интеграл може да се добије парцијалном интеграцијом.

Израчунати дати интеграл.

32. $\int_0^1 x^2\cdot\arctan(x^2)dx.$

33. $\int \frac{1-x^2}{x^2}\arctan x^2 dx.$

34. $\int_1^2 x\cdot\arctan\frac{2x}{x^2-1}dx.$

Интегранд типа $f(x)=g(x)\arctan h(x)$. Уместо рационалних функција R и S могу да буду и неке друге функције g и h.

Израчунати дати интеграл.

35. $\int_0^1 \arctan\sqrt{x}dx.$

36. $\int_0^1 \arctan\frac{1}{\sqrt{x}}dx.$

37. $\int_0^1 \frac{x\cdot\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

38. $\int_1^{16} \arctan\sqrt{\sqrt{x}-1}dx.$

39. $\int_0^1 \frac{\arctan\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx.$

Интегранд типа $f(x)=R(x)\arcsin^k x$ или $f(x)=R(x)\arccos^k x$. За интеграле овог типа важи слично као за интеграле са интеграндом $f(x)=R(x)\arctan^k x$, при чему се овде узима да је $u(x)=\arcsin^k(x)$, односно $u(x)=\arcsin^k(x)$. У случају када је $R(x)$ полином, после више примена парцијалне интеграције добија се тражени интеграл.

Израчунати дати интеграл.

40. $\int_0^1 x\cdot\arcsin x dx.$

41. $\displaystyle\int_0^1 x^2 \cdot \arccos x dx.$

42. $\displaystyle\int_0^1 x^2 \cdot \arcsin x dx.$

43. $\displaystyle\int_{-1}^1 \arcsin^2 x dx.$

44. $\displaystyle\int_0^1 \arcsin^4 x dx.$

Интегранд типа $f(x) = g(x) \arcsin h(x)$. И овде за функцију f овог типа постоје случајеви функција g и h за које интеграл може да се добије парцијалном интеграцијом.

Израчунати дати интеграл.

45. $\displaystyle\int_0^1 x \cdot \arcsin \frac{2x}{1+x^2} dx.$

46. $\displaystyle\int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx.$

47. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx.$

48. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1+x}} dx.$

49. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx.$

50. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 \cdot \arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx.$

51. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}} dx.$

52. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x}} dx.$

53. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx.$

54. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \arcsin^2 x dx.$

55. $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

Интегранд типа $f(x) = g(x)\ln^k h(x)$. У овом случају за прву парцијалну интеграцију бирамо $u = \ln^k h(x)$. Овде такође постоје случајеви када се интеграл не може добити само парцијалном интеграцијом. На пример, за $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ и $h(x) = x$, парцијалном интеграцијом са $u = \ln x$ и $dv = \dfrac{dx}{1+x^2}$ добијамо да је

$$I = \int_0^1 \frac{\ln x dx}{1+x^2} = -\int_0^1 \frac{\arctan x}{x} dx = -J,$$

а применом парцијалне интеграције на интеграл J поново се враћамо на интеграл I. Међутим, интеграл J може да се добије помоћу редова и једнак је раније поменутој константи Каталана.

Израчунати дати интеграл.

56. $\displaystyle\int_1^e x^2 \ln^2 x dx.$

57. $\displaystyle\int_1^e \ln^3 x dx.$

58. $\displaystyle\int_1^e \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx.$

59. $\displaystyle\int_0^1 x \ln(1+x^2) dx.$

60. $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^4) dx.$

61. $\displaystyle\int_0^{1/2} x \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$

62. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2} dx.$

63. $\displaystyle\int_1^e \sqrt{x} \ln^2 x dx.$

64. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x \ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^2} dx.$

65. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{x \ln(\sqrt{x^2-1}-x)}{\sqrt{x^2-1}} dx.$

66. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \ln^2(\sqrt{x^2-1}-x) dx.$

67. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos x \cdot \ln(1-\cos x) dx.$

68. Нека је $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx$ и $J = \displaystyle\int_0^1 \arctan^2 x dx$. Доказати да је $J = \dfrac{\pi^2}{16} - \dfrac{\pi}{4}\ln 2 + I$.

69. Нека је
$$I=\int_0^1 \frac{x\ln(1+x)\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx, \quad J=\int_0^1 \frac{\ln^2(1+x^2)}{1+x}dx.$$
Доказати да је $4I+J=\ln^3 2$.

70. Нека је
$$I=\int_0^1 \frac{\ln^2(1+x^2)}{x^4}dx, \quad J=\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx.$$
Доказати да је $3I+4J=-\ln^2 2-4\ln 2+2\pi$.

Још неки примери

Израчунати дати интеграл.

71. $\displaystyle\int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$.

72. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x-1)e^x}{(x+1)^3}dx$.

73. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-\arctan x}{x^2}dx$.

74. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx$.

75. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-\arctan x}{x^3}dx$.

76. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{xdx}{\tan x}$ (и још два интеграла [2])

77. $\displaystyle\int_{-1}^1 (\arccos x - x\sqrt{1-x^2})^2dx$.

Рекурентне везе. Када интегранд зависи од природног броја n, тада интеграл можемо да означимо са I_n, а у неким случајевима парцијалном интеграцијом може да се одреди веза између I_n и I_{n-1} или између I_n и I_{n-2}. Такве везе су познате као *рекурентне везе* и на основу њих и вредности интеграла за неке почетне вредности параметра n може да се добије интеграл I_n за дато n.

78. Нека је $I_n=\displaystyle\int_1^e x\ln^n x dx$, где је $n\in\mathbb{N}$. Одредити везу између I_n и I_{n-1}.

[2] Сменом $\sin x=t$ дати интеграл I постаје $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin t}{t}dt$. Ако сада на овај интеграл применимо парцијалну интеграцију са $u=\arcsin t$ и $dv=dt/t$, добијамо да је он једнак интегралу $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Дакле,
$$\int_0^1 \frac{\arcsin t}{t}dt=\int_0^1 \frac{\ln t dt}{\sqrt{1-t^2}}=I.$$

79. Нека је $I_n = \int_0^1 x^2 \ln^n x dx$, где је $n \in \mathbb{N}$. Одредити најпре везу између I_n и I_{n-1}, а затим израчунати I_n.

80. Нека је $I_n = \int_0^1 x^a \ln^n x dx$, где је $a \in \mathbb{R}_+$ и $n \in \mathbb{N}$. Одредити најпре везу између I_n и I_{n-1}, а затим израчунати I_n.

81. Нека је $I_n = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) \cos 2nx dx$ и $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} dx$. Доказати да је

$$I_n = \frac{1}{4n}(J_{n-1} - J_n).$$

82. Нека је $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$, где је $n \in \mathbb{N}$. Одредити најпре везу између I_n и I_{n-1}, а затим израчунати I_n.

83. Нека је $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^{n/2} dx$, где је $n \in \mathbb{N}$. Одредити најпре везу између I_n и I_{n+2}, а затим израчунати I_n.

84. Нека је $I_n = \int_0^a (a^2-x^2)^n dx$, где је $n \in \mathbb{N}$ и $a > 0$. Одредити најпре везу између I_n и I_{n-1}, а затим израчунати I_n.

85. Нека је $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$, где је $n \in \mathbb{N}$. Одредити најпре везу између I_n и I_{n-1}, а затим израчунати I_n.

86. Нека је $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$, где је $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Доказати најпре да за $n \geq 2$ важи

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2},$$

а затим доказати да је

$$I_{2m} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad I_{2m+1} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

87. Нека је $I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1+x^2}}$, где је n ненегативан цео број. Доказати да за $n \geq 2$ важи

$$nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}.$$

88. Нека је $I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{x^3+1}}$, где је $n \in \mathbb{N}$. Доказати да за $n \geq 4$ важи

$$(2n-1)I_n + 2(n-2)I_{n-3} = 2\sqrt{2},$$

а затим израчунати I_8.

89. Нека је $I_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$, где је $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је

$$I_n = \frac{\pi}{(n+1)(n+2)} - \frac{\pi^2}{(n+1)(n+2)} I_{n+2}.$$

90. Нека је $I_n = \int_0^{2\pi} x^{2n} \sin x dx$, где је $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је

$$I_n = \pi^{2n} - 2n(2n-1)I_{n-1}.$$

91. Нека је $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin(2k+1)x dx$, где је $k, n \in \mathbb{N}$. Доказати најпре да је

$$I_n = (-1)^k \frac{n}{(2k+1)^2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - \frac{n(n-1)}{(2k+1)^2} I_{n-2},$$

а затим израчунати $\int_0^{\pi/2} x^3 \sin 3x dx$.

92. Нека је $I_n = \int_0^1 x^n e^{\sqrt{x}} dx$, где је $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је

$$I_n = \frac{2e}{2n+3} + \frac{1}{2(n+1)(2n+3)} I_{n+1}.$$

93. Нека је $I_n = \int_0^{\pi} x^n \cos x dx$, где је $n \in \mathbb{N}$. Доказати да за $n \geq 2$ важи

$$I_n = -n(n-1)I_{n-2} - n\pi^{n-1}.$$

94. Нека је[3] $B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$ за $m, n \in \mathbb{N}$. Доказати да је

$$B(m,n) = \frac{n-1}{m} B(m+1, n-1),$$

а затим израчунати $B(m,n)$.

95. Нека је $I(m,n) = \int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx$. Доказати да је

$$I(m,n) = \frac{(2n-1)!! \cdot (2m-1)!!}{(2m+2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

96. Нека је $I_n = \int_0^1 \arcsin^n x dx$, где је $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је

$$I_n + n(n-1)I_{n-2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n.$$

97. Нека је $I_n = \int_0^1 x^n \arctan x dx$ и $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}$, где је $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је

$$I_n = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{4} - J_{n+1}\right), \quad J_n = \frac{1}{n-1} - J_{n-1}.$$

98. Нека је $I_n = \int_0^1 x^n \arctan x dx$. Доказати да је

$$\lim_{n\to\infty} n\left((n+1)I_n - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}.$$

[3] Интеграл $B(m,n)$ је познат као *Бета функција*, а на исти начин дефинише се и општији случај $B(a,b)$ за $a, b \in \mathbb{R}^+$.

99. Нека је $I_n = \int_0^1 \arctan^n x dx$, где је $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је

$$I_{n+1} + (n+1)I_n \geq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}.$$

100. Нека је $I_n = \int_0^1 x \arctan^n x dx$ и $J_n = \int_0^1 \arctan^n x dx$, где је $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је

$$I_n + \frac{n}{2} J_{n-1} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^n.$$

Решења

1. Парцијалном интеграцијом са $u = x^2$ и $dv = \sin x dx$ имамо да је

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x \Big|_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi} x \cos x dx = -4\pi^2 + 2J.$$

Ако и у интегралу J применимо парцијални интеграцију са $u = x$ и $dv = \cos x dx$, добијамо да је

$$J = x \sin x \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x dx = \cos x \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Према томе, $I = -4\pi^2$.

2. Парцијалном интеграцијом са

$$\begin{array}{c|c} u = x^2 & dv = \cos nx dx \\ \hline du = 2x dx & v = \dfrac{1}{n} \sin nx \end{array}$$

имамо да је

$$I = \frac{1}{n} x^2 \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin x dx = -\frac{2}{n} J.$$

Ако сада и на интеграл J применимо парцијалну интеграцију са

$$\begin{array}{c|c} u = x & dv = \sin nx dx \\ \hline du = dx & v = -\dfrac{1}{n} \cos nx \end{array}$$

добијамо да је

$$I = \frac{2}{n^2} x \cos x \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n^2} \int_0^{\pi} \cos nx dx = (-1)^n \frac{2\pi}{n^2}.$$

3. Нека је I дати интеграл и нека је $J = \displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \cos^2 x dx$. Тада је $I + J = \displaystyle\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^3}{3}$ и

$$J - I = \int_0^{\pi} x^2 (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int_0^{\pi} x \cos 2x dx = K.$$

Када на интеграл K применимо парцијалну интеграцију са $u = x^2$ и $dv = \cos 2x dx$, добијамо да је

$$J - I = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x \sin 2x dx = -\int_0^{\pi} x \sin 2x dx = L.$$

Ако сада и на интеграл L применимо парцијалну интеграцију, имамо да је

$$J - I = \frac{x \cos 2x}{2} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos 2x dx = \frac{\pi}{2}.$$

Из добијених једнакости $I + J = \pi^3/3$ и $J - I = \pi/2$ налазимо да је $I = \dfrac{\pi^3}{6} - \dfrac{\pi}{4}$ и $J = \dfrac{\pi^3}{6} + \dfrac{\pi}{4}$.

4. Нека је $I = \int_0^1 \sin(\ln x)dx$ и $J = \int_0^1 \cos(\ln x)dx$. Парцијалном интеграцијом са $u = \sin(\ln x)$ и $dv = dx$ имамо да је $du = \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$ и $v = x$, па је

$$I = x\sin(\ln x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \cos(\ln x)dx = -J.$$

Ако сада на интеграл J применимо парцијалну интеграцију са $u = \cos(\ln x)$ и $dv = dx$, добијамо да је

$$J = x\cos(\ln x)\Big|_0^1 + \int_0^1 \sin(\ln x)dx = 1 + I.$$

Из једнакости $I = -J$ и $J = 1 + I$ следи да је $I = -1/2$ и $J = 1/2$.

5. Сменом $x = t^2$ имамо да је $I = 2\int_0^{\pi/2} t\sin t dt = 2J$. Ако у интегралу J применимо парцијалну интеграцију са $u = t$ и $dv = \sin t dt$, добијамо да је

$$J = t\cos t\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos t dt = \sin t\Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

Према томе, $I = 2$.

6. Сменом $x = t^2$ имамо да је $I = 2\int_0^{\pi/2} t^3\sin t dt = 2J$. Парцијалном интеграцијом са $u = t^3$ и $dv = \sin t dt$ имамо да је

$$J = -t^3\cos t\Big|_0^{\pi/2} + 3\int_0^{\pi/2} t^2\cos t dt = 3\int_0^{\pi/2} t^2\cos t dt = 3K.$$

Како је (према једном од оретходних задатака) $K = \frac{\pi^2}{4} - 2$, то је $I = 2J = 6K = \frac{3}{2}\pi^2 - 12$.

7. Нека је $I = \int_0^{\pi/2} e^x\sin x dx$ и $J = \int_0^{\pi/2} e^x\cos x dx$. Ако на интеграл I применимо парцијалну интеграцију са $u = e^x$ и $dv = \sin x dx$ имамо да је

$$I = -e^x\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi 2} e^x\cos x dx = 1 + J.$$

Ако сада на сличан начин применимо парцијалну интеграцију на интеграл J, добијамо да је

$$J = e^x\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x\sin x dx = e^{\pi/2} - I.$$

Из једнакости $I = 1 + J$ и $J = e^{\pi/2} - I$ следи да је $I = \frac{1}{2}\left(1 + e^{\pi/2}\right)$ и $J = \frac{1}{2}\left(e^{\pi/2} - 1\right)$.

8. Нека је $I = \int_0^{\pi/2} xe^x\sin x dx$ и $J = \int_0^{\pi/2} xe^x\cos x dx$. Ако на интеграл I применимо парцијалну интеграцију са

$u = xe^x$	$dv = \sin x dx$
$du = (e^x + xe^x)dx$	$v = -\cos x$

имамо да је

$$I = -xe^x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (e^x + xe^x) \cos x dx = \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx + J.$$

Када слично применимо парцијалну интеграцију на интеграл J, добијамо да је

$$J = xe^x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (e^x + xe^x) \sin x dx = \frac{\pi}{2} e^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx - I.$$

Како је, према претходном задатку,

$$\int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx = \frac{1}{2}\left(1 + e^{\pi/2}\right), \quad \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx = \frac{1}{2}\left(e^{\pi/2} - 1\right),$$

важе једнакости

$$I = \frac{1}{2}\left(e^{\pi/2} - 1\right) + J, \quad J = \frac{\pi}{2} e^{\pi/2} - \frac{1}{2}\left(1 + e^{\pi/2}\right) - I$$

из којих следи да је $I = \frac{\pi}{4} e^{\pi/2} - \frac{1}{2}$ и $J = \frac{\pi}{4} e^{\pi/2} - \frac{1}{2} e^{\pi/2}$.

9. Ако је I дати интеграл и ако је $J = \int_{-2\sqrt{3}}^{2} \frac{dx}{4+x^2}$ и $K = \int_{-2\sqrt{3}}^{2} \frac{x^2 dx}{(4+x^2)^2}$, тада је $I = \frac{1}{4} J - \frac{1}{4} K$. Када на интеграл K применимо парцијалну интеграцију са

$u = x$	$dv = \frac{x dx}{(4+x^2)^2}$
$du = dx$	$v = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4+x^2}$

добијамо да је

$$K = \frac{x}{2(4+x^2)} \Big|_{-2\sqrt{3}}^{2} + \frac{1}{2} J = -\frac{2+\sqrt{3}}{16} + \frac{1}{2} J.$$

То значи да је

$$I = \frac{1}{4} J + \frac{1}{4} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{16} - \frac{1}{8} J = \frac{2+\sqrt{3}}{96} + \frac{1}{8} J.$$

Како је $J = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} \Big|_{-2\sqrt{3}}^{2} = \frac{\pi}{24}$, то је $I = \frac{2+\sqrt{3}}{96} + \frac{7\pi}{192}$.

10. Парцијалном интеграцијом са

$u = x$	$dv = \frac{\sin x dx}{1 + \cos^2 x}$
$du = dx$	$v = \arctan(\cos x)$

имамо да је

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = x \arctan(\cos x) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \arctan(\cos x) dx = \frac{\pi^2}{4} + J.$$

Ако интеграл J напишемо као збир два интеграла (први са границама 0 и $\pi/2$, а други са границама $\pi/2$ и π) и ако у другом интегралу уведемо смену $x = \pi - t$, лако налазимо да је $J = 0$. Према томе, $I = \pi^2/4$.

11. Парцијалном интеграцијом са $u = x$ и $dv = \dfrac{dx}{\cos^4 x}$ имамо да је

$$du = dx, \quad v = \int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \cos^2 x} = \int (1 + \tan^2 x) d(\tan x) = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x,$$

па је

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{xdx}{\cos^4 x} = x\tan x + \frac{x}{3}\tan^3 x \Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan x dx - \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} \tan^3 x dx = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{3}J.$$

Како је $J = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\ln 2$, то је $I = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{3}\ln 2$.

12. Парцијалном иинтеграцијом са

$u = x$	$dv = \dfrac{\cos x}{\sin^3 x}dx$
$du = dx$	$v = -\dfrac{1}{2\sin^2 x}$

имамо да је

$$I = -\frac{x}{2\sin^2 x}\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} + \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cot x\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{1}{2}.$$

13. Парцијалном интеграцијом са

$u = x$	$dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$
$du = dx$	$v = -\sqrt{1-x^2}$

имамо да је

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 + \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}.$$

14. За $u = \sqrt{1+4x^2}$ и $dv = dx$ имамо да је $du = \dfrac{4xdx}{\sqrt{1+4x^2}}$ и $v = x$, па је

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx = x\sqrt{1+4x^2}\Big|_0^1 - 4\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1+4x^2}} = \sqrt{5} - \int_0^1 \sqrt{1+4x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}.$$

Из ове једнакости следи да је

$$I = \sqrt{5} - I + \frac{1}{2}\ln(2x + \sqrt{1+4x^2})\Big|_0^1,$$

одакле добијамо да је $I = \dfrac{\sqrt{5}}{2} + \dfrac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})$.

15. Парцијалном интеграцијом са $u = x$ и $dv = x\sqrt{1+4x^2}dx$ имамо да је $du = dx$ и $v = \dfrac{1}{12}(1+4x^2)^{3/2}$, па је

$$I = \int_0^1 x^2\sqrt{1+4x^2}dx = \frac{x}{12}(1+4x^2)^{3/2}\Big|_0^1 - \frac{1}{12}\int_0^1 (1+4x^2)^{3/2}dx = \frac{5\sqrt{5}}{12} - \frac{1}{12}J - \frac{1}{3}I,$$

где је J интеграл из претходног задатка.

Из последње једнакости следи да је $I = \dfrac{5\sqrt{5}}{16} - \dfrac{1}{16}J$. Како је $J = \dfrac{\sqrt{5}}{2} + \dfrac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})$, то је $I = \dfrac{9\sqrt{5}}{32} - \dfrac{1}{64}\ln(2+\sqrt{5})$.

16. Ако је I дати интеграл, тада из једнакости

$$\cos(n+1)x = \cos nx \cos x - \sin nx \sin x$$

имамо да је

$$I = \int_0^\pi \sin^{n-1} x \cos nx \cos x dx - \int_0^\pi \sin^n x \sin nx dx = J - K.$$

Када на интеграл J применимо парцијалну интеграцију са

$u = \cos nx$	$dv = \sin^{n-1} x \cos x dx$
$du = n \sin nx dx$	$v = \dfrac{\sin^n x}{n}$

добијамо да је

$$J = \frac{\cos nx \sin^n x}{n}\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \sin^n x \sin nx dx = K.$$

Према томе, $I = K - K = 0$.

17. Ако је I дати интеграл, тада из једнакости

$$\sin(n+1)x = \sin nx \cos x + \cos nx \sin x$$

имамо да је

$$I = \int_0^\pi \cos^n x dx + \int_0^\pi \cos^{n-1} x \cos nx \sin x dx = J + K.$$

Када на интеграл K применимо парцијалну интеграцију са

$u = \cos nx$	$dv = \cos^{n-1} x \sin x dx$
$du = -n \sin nx dx$	$v = -\dfrac{\cos^n x}{n}$

добијамо да је

$$J = -\frac{\cos nx \cos^n x}{n}\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos^n x \sin nx dx = -J.$$

Према томе, $I = J - J = 0$.

18. Ако је I дати интеграл, тада из једнакости

$$\cos(n+1)x = \cos nx \cos x - \sin nx \sin x$$

имамо да је

$$I = \int_0^\pi \cos^n x \cos nx dx - \int_0^\pi \cos^{n-1} x \sin nx \sin x dx = J - K.$$

Када на интеграл K применимо парцијалну интеграцију са

$u = \sin nx$	$dv = \cos^{n-1} x \sin x dx$
$du = n \cos nx dx$	$v = -\dfrac{\cos^n x}{n}$

добијамо да је

$$J = -\frac{\sin nx \cos^n x}{n}\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos^n x \cos nx dx = K.$$

Према томе, $I = K - K = 0$.

Напомена. Дата једнакост не важи ако број $n \in \mathbb{N}$ заменимо реалним бројем $a \geq 1$. Међутим, важи

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{a-1} x \cos(a+1)x dx = 0.$$

19. Парцијалном интеграцијом са $u = x$ и $dv = f''(x)dx$ добијамо да је

$$\int_a^b x f''(x)dx = x f'(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)dx = bf'(b) - af'(a) - f(x)\Big|_a^b,$$

одакле следи дата једнакост.

20. Парцијалном интеграцијом са $u = x^2$ и $dv = f'''(x)dx$ добијамо да је

$$\int_a^b x f''(x)dx = x^2 f''(x)\Big|_a^b - 2\int_a^b x f''(x)dx = b^2 f''(b) - a^2 f''(a) - 2J,$$

одакле следи дата једнакост.

21. Парцијалном интеграцијом са $\arctan x = u$ и $dx = dv$ имамо $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$ и $v = x$, па је

$$I = x\arctan x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

22. Парцијалном интеграциојом са $u = \arctan x$ и $dv = xdx$ имамо да је

$$\int_0^1 x\arctan x dx = \frac{x^2}{2}\arctan x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

23. Парцијалном интеграцијом са $u = \arctan x$ и $dv = x^2dx$ имамо да је

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2\arctan x dx &= \frac{x^3}{3}\arctan x\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3dx}{1+x^2} \\
&= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3dx}{1+x^2} \\
&= \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\int_0^1 \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx \\
&= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]\Big|_0^1 \\
&= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{6}(\ln 2 - 1).
\end{aligned}$$

24. Парцијалном интеграцијом са $u = \arctan x$ и $dv = x^3dx$ имамо да је

$$I = \int_0^1 x^3\arctan x dx = \frac{x^4}{4}\arctan x\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{x^4dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3} - x + \arctan x\right]\Big|_0^1.$$

Према томе, $I = \dfrac{1}{6}$.

25. Парцијалном интеграцијом са $u = \arctan x$ и $dv = x^4 dx$ имамо да је

$$I = \int_0^1 x^4 \arctan x dx = \frac{x^5}{5} \arctan x \Big|_0^1 - \frac{1}{5} \int_0^1 \frac{x^5 dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{20} - \frac{1}{5} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right] \Big|_0^1.$$

Према томе, $I = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{1}{10} - \dfrac{\ln 2}{10}$.

26. Парцијалном интеграцијом са

$u = \arctan x$	$dv = \dfrac{dx}{x^2}$
$du = \dfrac{dx}{1+x^2}$	$v = -\dfrac{1}{x}$

добијамо да је

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\arctan x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \arctan x \Big|_1^{\sqrt{3}} + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x(1+x^2)} = \frac{9-4\sqrt{3}}{36}\pi + J.$$

Како је

$$J = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{1+x^2} = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \ln \frac{2}{3},$$

то је $I = \dfrac{9-4\sqrt{3}}{36}\pi + \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{2}{3}$.

27. Парцијалном интеграцијом са

$u = \arctan x$	$dv = \dfrac{dx}{x^3}$
$du = \dfrac{dx}{1+x^2}$	$v = -\dfrac{1}{2x^2}$

добијамо да је

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\arctan x}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} \arctan x \Big|_1^{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = \frac{5\pi}{72} + \frac{1}{2} J.$$

Како је

$$J = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} - \arctan x \Big|_1^{\sqrt{3}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{12},$$

то је $I = \dfrac{\pi}{36} + \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$.

28. Парцијалном интеграцијом са

$u = \arctan x$	$dv = \dfrac{dx}{x^4}$
$du = \dfrac{dx}{1+x^2}$	$v = -\dfrac{1}{3x^3}$

имамо да је

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\arctan x}{x^4} dx = -\frac{1}{3x^3} \arctan x \Big|_1^{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^3(1+x^2)} = \frac{27-4\sqrt{3}}{3^4 \cdot 4}\pi + J.$$

Интегал J је интеграл рационалне функције, па је

$$J = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^3} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x} + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}.$$

Према томе, $I = \dfrac{27-4\sqrt{3}}{3^4\cdot 4}\pi + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{6}\ln\dfrac{2}{3}$.

29. Парцијалном интеграцијом са

$$\begin{array}{c|c} \arctan x & dv = \dfrac{dx}{x^5} \\ \hline du = \dfrac{dx}{1+x^2} & v = -\dfrac{1}{4x^4} \end{array}$$

имамо да је

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\arctan x}{x^5}dx = -\frac{1}{4x^4}\arctan x\Big|_1^{\sqrt{3}} + \frac{1}{4}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4(1+x^2)} = \frac{23\pi}{16\cdot 27} + \frac{1}{4}J.$$

Како је

$$J = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2} + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} + \arctan x\Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}-18}{27} + \frac{\pi}{12},$$

то је $I = \dfrac{2\pi}{27} + \dfrac{4\sqrt{3}-9}{54}$.

30. Парцијалном интеграцијом са $u = \arctan^2 x$ и $dv = xdx$ имамо

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^2}{2}\arctan x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2\arctan x}{1+x^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{16} - \int_0^1 \arctan x dx + \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{16} - J + \frac{1}{2}\arctan^2 x\Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi^2}{16} - J. \end{aligned}$$

Применом још једне парцијалне интеграције добијамо да је

$$J = \int_0^1 \arctan x dx = x\arctan x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Према томе, $I = \dfrac{\pi^2}{16} - \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\ln 2$.

31. Применом парцијалне интеграције са

$$\begin{array}{c|c} u = \arctan^3 x dx & dv = xdx \\ \hline du = \dfrac{3\arctan^2 x}{1+x^2}dx & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}$$

имамо да je

$$I = \frac{x^2}{2}\arctan^3 x \Big|_0^1 - \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{x^2\arctan^2 x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 - \frac{3}{2}K.$$

Како je

$$K = \int_0^1 \arctan^2 x dx - \int_0^1 \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}dx = J - \frac{1}{3}\arctan^3 x \Big|_0^1 = J - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3,$$

то je

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 - \frac{3}{2}J + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 = \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 - \frac{3}{2}J,$$

одакле следи дата једнакост.

32. Парцијалном интеграцијом са $u = \arctan(x^2)$ и $dv = x^2dx$ имамо

$$\int_0^1 x^2\cdot\arctan(x^2)dx = \frac{1}{3}x^3\arctan x^2\Big|_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{x^4dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{12} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dx}{x^4+1}.$$

Како je

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\arctan(x\sqrt{2}+1) + \arctan(x\sqrt{2}-1)\Big) + C,$$

то je

$$\int_0^1 x^2\cdot\arctan(x^2)dx = \frac{(1+\sqrt{2})}{12}\pi - \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}\ln(1+\sqrt{2}).$$

33. Парцијалном интеграцијом са

$u = \arctan x^2$	$dv = \dfrac{1-x^2}{x^2}dx$
$du = \dfrac{2xdx}{1+x^4}$	$v = -\dfrac{x^2+1}{x}$

имамо да je

$$I = -\frac{x^2+1}{x}\arctan x\Big|_0^1 + 2\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}dx = -\frac{\pi}{2} + 2J.$$

Како je

$$\int \frac{1+x^2}{1+x^4}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\arctan(\sqrt{2}x+1) - \arctan(1-\sqrt{2}x)\Big),$$

то je $J = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$. Према томе, $I = -\dfrac{\pi}{2} + 2J = \dfrac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1)$.

34. Парцијалном интеграцијом са $u = \arctan\dfrac{2x}{x^2-1}$ и $dv = xdx$ имамо

$$du = \frac{1}{1+\frac{4x^2}{(x^2-1)^2}}\cdot\frac{2(x^2-1)-4x^2}{(x^2-1)^2} = -\frac{2dx}{x^2+1}, \quad v = \frac{x^2}{2},$$

па je

$$I = \frac{x^2}{2}\arctan\frac{2x}{x^2-1}\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{x^2dx}{x^2-1} = 2\arctan\frac{4}{3} + 1 - \arctan 2.$$

35. Парцијалном интеграцијом са

$$\begin{array}{c|c} u = \arctan\sqrt{x} & dv = dx \\ \hline du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)} & v = x \end{array}$$

добијамо да је

$$I = x \cdot \arctan x \Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{1+x} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}J.$$

Како је $J = 2 - \dfrac{\pi}{2}$, то је $I = \dfrac{\pi}{2} - 1$.

Напомена. Ако прво уведемо смену $\sqrt{x} = t$, биће $I = 2\displaystyle\int_0^1 t \cdot \arctan t dt = 2J$. Сада опет парцијалном интеграцијом са $u = \arctan t$ и $dv = tdt$ имамо да је

$$J = \frac{t^2}{2}\arctan t\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{8} - \frac{t}{2}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\arctan t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

36. Парцијалном интеграцијом са $u = \arctan\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ и $dv = dx$ имамо да је

$$\int_0^1 \arctan\frac{1}{\sqrt{x}}dx = x\arctan\frac{1}{\sqrt{x}}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{xdx}{(1+x)\sqrt{x}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}J.$$

Како је $J = 2 - \dfrac{\pi}{2}$, то је $I = 1$.

37. Парцијалном интеграцијом са

$$\begin{array}{c|c} u = \arctan x & dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} \\ \hline du = \dfrac{dx}{1+x^2} & v = \sqrt{1+x^2} \end{array}$$

добијамо да је

$$I = \sqrt{1+x^2}\arctan x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} - \ln(1+\sqrt{2}).$$

38. Парцијалном интеграцијом са

$$\begin{array}{c|c} u = \arctan\sqrt{\sqrt{x}-1} & dv = dx \\ \hline du = \dfrac{1}{4x\sqrt{\sqrt{x}-1}} & v = x \end{array}$$

имамо да је

$$I = x\arctan\sqrt{\sqrt{x}-1}\Big|_1^{16} - \frac{1}{4}\int_1^{16}\frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}-1}} = \frac{16\pi}{3} - \frac{1}{4}J.$$

Ако у интегралу J уведемо најпре смену $x = t^2$, а затим и смену $t = u^2+1$, добијамо да је

$$J = 2\int_1^4 \frac{tdt}{\sqrt{t-1}} = 4\int_0^{\sqrt{3}}(u^2+1)du = 8\sqrt{3}.$$

Према томе, $I = \dfrac{16\pi}{3} - 2\sqrt{3}$.

39. За $u = \arctan\sqrt{1+x^2}$ и $dv = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ имамо да је

$$du = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+1+x^2}dx = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}(2+x^2)}dx$$

и[4]

$$v = \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Како функције u и v имају непрекидне изводе на $[0,1]$, може да се употреби парцијална интеграција којом добијамо да је

$$\int_0^1 \frac{\arctan\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{\arctan\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \int_0^1 \frac{x^2dx}{(1+x^2)(2+x^2)}.$$

За интеграл на десној страни ове једнакости имамо да је

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2dx}{(1+x^2)(2+x^2)} &= \int_0^1 \frac{(1+x^2)dx}{(1+x^2)(2+x^2)} - \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(2+x^2)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{dx/\sqrt{2}}{1+(x/\sqrt{2})^2} - \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(2+x^2)}\\ &\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}} - \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(2+x^2)}.\end{aligned}$$

Како је

$$\frac{1}{(1+x^2)(2+x^2)} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2+x^2},$$

то је

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(2+x^2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Најзад, добијамо да је

$$\int_0^1 \frac{\arctan\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2} - \sqrt{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}.$$

40. Парцијалном интеграцијом са $u = \arcsin x$ и $dv = dx$ имамо да је

$$\int_0^1 x\cdot\arcsin x dx = \frac{x^2}{2}\arcsin x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}J.$$

Како је (према једном од претходних задатака) $J = \pi/4$, то је $I = \pi/8$.

41. Парцијалном интеграцијом са

[4] За $\int v'dx$ можемо да употребимо смену $x = \sinh u$. Тада је

$$dx = \cosh u du, \quad 1+x^2 = \cosh^2 u, \quad \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = du,$$

па је

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{du}{\cosh^2 u} = \tanh u + C = \frac{\sinh u}{\cosh u} + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

$u = \arccos x$	$dv = x^2 dx$
$du = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$v = \dfrac{x^3}{3}$

имамо да је

$$I = -\frac{x^3}{3}\arccos x\Big|_0^1 + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{3}J.$$

Ако и у интегралу J применимо парцијалну интеграцију са

$u = x^2$	$dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$
$du = 2xdx$	$v = -\sqrt{1-x^2}$

добијамо да је

$$J = -x^2\sqrt{1-x^2}\,\Big|_0^1 + \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2} = \frac{2}{3}.$$

Према томе, $I = \dfrac{1}{3}J = \dfrac{2}{9}$.

42. Интеграл добијамо слично као у претходном задатку парцијалном интеграцијом са $u = \arcsin x$ и $dv = x^2 dx$.

Напомена. Из једнакости

$$\int_0^1 x^2 \arcsin x dx + \int_0^1 x^2 \arccos x dx = \frac{\pi}{2}\int_0^1 x^2 dx = \frac{\pi}{6}$$

следи да је $\displaystyle\int_0^1 x^2 \arcsin x dx = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}$.

43. Применом парцијалне интеграције са

$u = \arcsin^2 x$	$dv = dx$
$du = \dfrac{2\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$v = x$

имамо да је

$$I = \int_{-1}^1 \arcsin^2 x dx = x\arcsin^2 x\,\Big|_{-1}^1 = \frac{\pi^2}{2} - 2J.$$

Ако сада и на интеграл J применимо парцијалну интеграцију са

$u = \arcsin x$	$dv = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$v = -\sqrt{1-x^2}$

добијамо да је

$$J = \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x dx = -\sqrt{1-x^2}\,\Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 dx = 2.$$

Према томе, $I = \dfrac{\pi^2}{2} - 4$.

44. Парцијалном интеграцијом са

$u = \arcsin^4 x$	$dv = dx$
$du = \dfrac{4\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$	$v = x$

добијамо да је

$$I = \int_0^1 \arcsin^4 x dx = x\arcsin^4 x\Big|_0^1 - 4\int_0^1 \frac{x\arctan^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi^4}{16} - 4J.$$

Када на интеграл J применимо парцијалну интеграцију са

$u = \arcsin^3 x$	$dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$
$du = \dfrac{3\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$	$v = -\sqrt{1-x^2}$

имамо да је

$$J = -\sqrt{1-x^2}\arcsin^3 x + 3\int_0^1 \arcsin^2 x dx == 3\int_0^1 \arcsin^2 x dx = 3K.$$

Из претходног задатка је $K = \pi^2/4 - 2$. Према томе, $I = \dfrac{\pi^4}{16} - 12K = \dfrac{\pi^4}{16} - 3\pi^2 + 24.$

45. Парцијалном интеграцијом са

$u = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$	$dv = xdx$
$du = \dfrac{2dx}{1+x^2}$	$v = \dfrac{x^2}{2}$

имамо да је

$$I = \frac{x^2}{2}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - x\Big|_0^1 + \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

46. За $u = \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ и $dv = dx$ имамо да је $v = x$ и

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x}{x+1}}}\cdot\sqrt{\frac{x}{x+1}}' = \frac{dx}{2(1+x)\sqrt{x}},$$

па је

$$\begin{aligned} I &= x\cdot\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\Big|_0^3 - \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{xdx}{(1+x)\sqrt{x}} \\ &= 2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \int_0^3 \frac{\sqrt{x}^2 d\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}^2} \\ &= \pi - \int_0^3 \frac{1+\sqrt{x}^2-1}{1+\sqrt{x}^2}d\sqrt{x} \\ &= \pi - \sqrt{x}\Big|_0^3 + \arctan\sqrt{x}\Big|_0^3 \\ &= \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

47. Парцијалном интеграцијом са

$$\begin{array}{c|c} u = \arcsin x & dv = \dfrac{dx}{\sqrt{1+x}} \\ \hline du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & v = 2\sqrt{1+x} \end{array}$$

имамо да је

$$I = \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx = 2\sqrt{1+x}\arcsin x \Big|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2\sqrt{2}\frac{\pi}{2} + 4\sqrt{1-x}\Big|_0^1 = \pi\sqrt{2} - 4.$$

48. Парцијалном интеграцијом са

$$\begin{array}{c|c} u = \arcsin^3 x & dv = \dfrac{dx}{\sqrt{1+x}} \\ \hline du = \dfrac{3\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx & v = 2\sqrt{1+x} \end{array}$$

имамо да је

$$I = 2\sqrt{1+x}\arcsin^3 x \Big|_0^1 - 6\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin^2 x dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi^3 - 6J.$$

Ако у интегралу J применимо парцијалну интеграцију са

$$\begin{array}{c|c} u = \arcsin^2 x & dv = \dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ \hline du = \dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx & v = -2\sqrt{1-x} \end{array}$$

добијамо

$$J = -2\sqrt{1-x}\arcsin^2 x \Big|_0^1 + 4\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x dx = 4\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx = 4K.$$

Како је, према једном од ранијих задатака, $K = \sqrt{2}\pi - 4$, то је $I = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi^3 - 24\sqrt{2}\pi + 96.$

49. Парцијалном интеграцијом са

$$\begin{array}{c|c} u = \arcsin x & dv = \dfrac{x dx}{\sqrt{1+x}} \\ \hline du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & v = \dfrac{2}{3}(1+x)^{3/2} - 2\sqrt{1+x} \end{array}$$

имамо да је

$$I = \left[\frac{2}{3}(1+x)^{3/2} - 2\sqrt{1+x}\right] \arcsin x \Big|_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{(1+x)^{3/2}}{\sqrt{1-x^2}} dx + 2\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Како је

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^{3/2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{10}{3}, \qquad \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2,$$

то је $I = \dfrac{16}{9} - \dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi.$

50. Парцијалном интеграцијом са

$u = \arcsin x$	$dv = \dfrac{x^2dx}{\sqrt{1+x}}$
$du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$v = \dfrac{2}{5}(1+x)^{5/2} - \dfrac{4}{3}(1+x)^{3/2} + 2(1+x)^{1/2}$

имамо да је

$$I = uv\Big|_0^1 - \frac{2}{5}\int_0^1 \frac{(1+x)^{5/2}}{\sqrt{1-x^2}}dx + \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{(1+x)^{3/2}}{\sqrt{1-x^2}}dx - 2\int_0^1 \frac{(1+x)^{1/2}}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Како је

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^{5/2}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{86}{15}, \quad \int_0^1 \frac{(1+x)^{3/2}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{10}{3}, \quad \int_0^1 \frac{(1+x)^{1/2}}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2$$

и како је $uv\Big|_0^1 = \dfrac{7\sqrt{2}}{15}\pi$, то је $I = \dfrac{7\sqrt{2}}{15}\pi - \dfrac{416}{225}$.

51. Парцијалном интеграцијом са

$u = \arcsin x$	$dv = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x}}$
$du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$v = -2\sqrt{1-x}$

имамо да је

$$I = -2\sqrt{1-x}\arcsin x\Big|_{-1}^0 + 2\int_{-1}^0 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{2}\pi + 2J.$$

Како је $J = 2$, то је $I = 4 - \sqrt{2}\pi$.

52. Парцијалном интеграцијом са

$u = \arcsin x$	$dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x}}$
$du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$v = \dfrac{2}{3}(1-x)^{3/2} - 2\sqrt{1-x}$

имамо да је

$$I = uv\Big|_{-1}^0 - \frac{2}{3}\int_{-1}^0 \frac{(1-x)^{3/2}}{\sqrt{1-x^2}}dx + 2\int_{-1}^0 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi - \frac{2}{3}J + 2K.$$

Како је $J = \dfrac{10}{3}$ и $K = 2$, то је $I = \dfrac{16}{9} - \dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$.

53. Парцијалном интеграцијом са

$u = \arcsin x$	$dv = \sqrt{1-x^2}dx$
$du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$v = \dfrac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)$

добијамо да је

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\arcsin x dx = x\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \arcsin^2 x\Big|_0^1 - \int_0^1 x dx - \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{16}(\pi^2-4).$$

54. Парцијалном интеграцијом са

$u = \arcsin^2 x$	$dv = \sqrt{1-x^2}dx$
$du = 2\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$	$v = \dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{2}\arcsin x$

имамо да је

$$I = \frac{1}{2}\arcsin^3 x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x\Big|_0^1 - \int_0^1 x\arcsin x dx - \int_0^1 \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi^3}{16} - J - K.$$

Како је $J = \pi/8$ (према једном од претходних задатака) и $K = \pi^3/24$ (ово је конвергентан несвојствени интеграл који се лако израчунава), то је $I = \dfrac{\pi^3}{48} - \dfrac{\pi}{8}$.

55. Парцијалном интеграцијом са $u = \arcsin x$ и $dv = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ имамо да је $du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и $v = -\sqrt{1-x^2}$, па је

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left[-\sqrt{1-x^2}\arcsin x\right]\Big|_0^{1/\sqrt{2}} + \int_0^{1/\sqrt{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

56. Парцијалном интеграцијом са $u = \ln^2 x$ и $dv = x^2 dx$ имамо да је

$$\int_1^e x^2\ln^2 dx = \frac{1}{3}x^3\ln^2 x\Big|_1^e - \frac{2}{3}\int_1^e x^2\ln x dx.$$

Новом парцијалном интеграцијом са $u = \ln x$ и $dv = x^2 dx$ добијамо да је

$$\int_1^e x^2\ln^2 x dx = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx\right] = \frac{5}{27}e^3 - \frac{2}{27}.$$

57. Нека је $I = \displaystyle\int_1^e \ln^3 x dx$, $J = \displaystyle\int_1^e \ln^2 x dx$ и $K = \displaystyle\int_1^e \ln x dx$. Ако на интеграл I применимо парцијалну интеграцију са $u = \ln^3 x$ и $dv = dx$, добијамо да је

$$I = x\ln^3 x\Big|_1^e - 3\int_1^e = e - 3K.$$

Ако сада на интеграл J применимо парцијалну интеграцију са $u = \ln^2 x$ и $dv = dx$, имамо да је

$$J = x\ln^2 x\Big|_1^e - 2\int_1^e \ln x dx = e - 2K.$$

Како је $K = 1$, то је $I = e - 3(e-2) = 6 - 2e$.

58. Парцијалном интеграцијом са

$$\begin{array}{c|c} u = \ln x & dv = \dfrac{x dx}{(x^2+1)^2} \\ \hline du = \dfrac{dx}{x} & v = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x^2+1} \end{array}$$

имамо да је

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} \Big|_1^e + \frac{1}{2} \int_1^e \frac{1}{x(x^2+1)} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e^2+1} + \frac{1}{2} \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2(e^2+1)} + \frac{1}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) \Big|_1^e \\ &= \frac{e^2}{2(e^2+1)} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\ln 2}{e^2+1}. \end{aligned}$$

59. Парцијалном интеграцијом са $u = \ln(1+x^2)$ и $dv = x dx$ имамо

$$\int_0^1 x \ln(1+x^2) dx = \frac{x^2}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3 dx}{1+x^2} = \frac{\ln 2}{2} - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2} = \ln 2 - 1/2.$$

60. За $u = \ln(1+x^4)$ и $dv = dx$ имамо да је

$$\int_0^1 \ln(1+x^4) dx = x \ln(1+x^4)|_0^1 - 4 \int_0^1 \frac{x^4}{1+x^4} dx = \ln 2 - 4 + 4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} = \ln 2 - 4 + 4J.$$

Како је

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1},$$

то је

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}+1} \Bigg|_0^1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} (\arctan(\sqrt{2}x+1) + \arctan(\sqrt{2}x-1)) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(3+2\sqrt{2}) + \frac{1}{2\sqrt{2}} (\arctan(\sqrt{2}+1) + \arctan(\sqrt{2}-1)). \end{aligned}$$

Према томе, $I = \ln 2 - 4 + 4J$.

61. За $u = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ и $dv = x dx$ имамо да је $du = \dfrac{3dx}{1-x^2}$ и $v = \dfrac{x^2}{2}$, па је

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{x^2}{1-x^2} dx \\ &= \frac{1}{8} \ln 3 + x \Big|_0^{1/2} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \Big|_0^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{3}{8} \ln 3. \end{aligned}$$

62. Парцијалном интеграцијом са

$$\begin{array}{c|c} u = \ln(1+x+x^2) & dv = \dfrac{dx}{(1+x)^2} \\ \hline du = \dfrac{1+2x}{1+x+x^2} dx & v = -\dfrac{1}{1+x} \end{array}$$

имамо да је

$$I = -\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1+2x}{(1+x)(1+x+x^2)}dx = -\frac{1}{2}\ln 3 + J.$$

Како је

$$\int \frac{1+2x}{(1+x)(1+x+x^2)}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x+x^2) - \ln(1+x) + \sqrt{3}\arctan\frac{1+2x}{\sqrt{3}} + C,$$

то је $J = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} - \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3$, па је $I = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} - \ln 2$.

63. Парцијалном интеграцијом са

$u = \ln^2 x$	$dv = \sqrt{x}dx$
$du = 2\ln x \cdot \frac{dx}{x}$	$v = \frac{2}{3}x^{3/2}$

имамо да је

$$I = \int_1^e \sqrt{x}\ln^2 x dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\ln^2 x\Big|_1^e - \frac{4}{3}\int_1^e \sqrt{x}\ln x dx = \frac{2}{3}e^{3/2} - \frac{4}{3}J.$$

Када на интеграл J применимо парцијалну интеграцију са

$u = \ln x$	$dv = \sqrt{x}dx$
$du = \frac{dx}{x}$	$v = \frac{2}{3}x^{3/2}$

добијамо да је

$$J = \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x\Big|_1^e - \frac{2}{3}\int_1^e \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}e^{3/2} - \frac{4}{9}x^{3/2}\Big|_1^e = \frac{2}{9}e^{3/2} + \frac{4}{9}.$$

Према томе, $I = \frac{2}{3}e^{3/2} - \frac{4}{3}J = \frac{2}{27}(5e^{3/2} - 8)$.

64. Парцијалном интеграцијом са

$u = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$	$dv = \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$
$du = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$	$v = -\frac{1}{2(1+x^2)}$

имамо да је

$$I = -\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1+x^2)}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 (1+x^2)^{-3/2}dx = -\frac{1}{4}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{2}J.$$

Ако у интегралу J уведемо смену $x = \tan t$ за $t \in [0, \pi/4]$, добијамо да је

$$J = \int_0^{\pi/4} (1+\tan^2 t)^{-3/2}\cos^{-2} t dt = \int_0^{\pi/4} \cos t dt = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Према томе, $I = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{4}\ln(1+\sqrt{2})$.

65. Парцијалном интеграцијом са

$$\begin{array}{c|c} u = \ln(\sqrt{x^2-1}-x) & dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} \\ \hline du = -dx\sqrt{x^2-1} & v = \sqrt{x^2-1} \end{array}$$

имамо

$$I = \sqrt{x^2-1}\ln(\sqrt{x^2-1}-x)\Big|_{-2}^{-1} + \int_{-2}^{-1} dx = 1 - \sqrt{3}\ln(2+\sqrt{3}).$$

66. Парцијалном интеграцијом са

$$\begin{array}{c|c} u = \ln^2(\sqrt{x^2-1}-x) & dv = dx \\ \hline du = -\dfrac{2\ln(\sqrt{x^2-1}-x)}{\sqrt{x^2-1}}dx & v = x \end{array}$$

имамо да је

$$I = x\ln^2(\sqrt{x^2-1}-x)\Big|_{-2}^{-1} + 2\int_{-2}^{-1} \frac{x\ln(\sqrt{x^2-1}-x)}{\sqrt{x^2-1}}dx = 2\ln^2(2+\sqrt{3}) + J.$$

Како је (према претходном задатку) $J = 1 - \sqrt{3}\ln(2+\sqrt{3})$, то је

$$I = 2\ln^2(2+\sqrt{3}) + 1 - \sqrt{3}\ln(2+\sqrt{3}).$$

67. Парцијалном интеграцијом са $u = \ln(1-\cos x)$ и $dv = \cos x dx$ имамо да је

$$\begin{aligned} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos x \cdot \ln(1-\cos x)dx &= [\sin x \ln(1-\cos x)]|_{\pi/3}^{\pi/2} - \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\ln 2 - \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\ln 2 - \int_{\pi/3}^{\pi/2} (1+\cos x)dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(1+\ln 2) - \frac{\pi}{6} - 1. \end{aligned}$$

68. Ако на интеграл J применимо парцијалну интеграцију са $u = \arctan x$ и $dv = dx$, добијамо да је

$$J = x \cdot \arctan^2 x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x\arctan x}{1+x^2}dx = \frac{\pi^2}{16} - 2\int_0^1 \frac{x\arctan x}{1+x^2}dx = \frac{\pi^2}{16} - 2K.$$

Када и на интеграл K применимо парцијалну интеграцију са $u = \arctan x$ и $dv = \dfrac{xdx}{1+x^2}$, имамо да је

$$J = \frac{\pi^2}{16} - \arctan x \cdot \ln(1+x^2)\Big|_0^1 + I = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4}\ln 2 + I.$$

69. Парцијалном интеграцијом са $u = \ln(1+x)$ и $dv = \dfrac{x\ln(1+x^2)}{1+x}dx$ добијамо да је

$$I = \frac{1}{4}\ln(1+x)\ln^2(1+x^2)\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\ln^2(1+x^2)}{1+x} = \frac{1}{4}\ln^3 2 - \frac{1}{4}J,$$

одакле следи дата једнакост.

70. Парцијалном интеграцијом са

$$\begin{array}{c|c} u = \ln^2(1+x^2) & dv = \dfrac{dx}{x^4} \\ \hline du = \dfrac{4x\ln(1+x^2)}{1+x^2} & v = -\dfrac{1}{x^3} \end{array}$$

имамо да је

$$I = -\frac{1}{3} \cdot \frac{\ln^2(1+x^2)}{x^3} \Big|_0^1 + \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x^2(1+x^2)} dx = -\frac{1}{3} \ln^2 2 + \frac{4}{3} A.$$

Како је $\dfrac{1}{x^2(1+x^2)} = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{1+x^2}$, то је

$$A = \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx - \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx = B - J.$$

Ако и на интеграл B применимо парцијалну интеграцију добијамо да је $B = -\ln 2 + \pi/2$. Према томе,

$$I - \frac{1}{3} \ln^2 2 + \frac{4}{3} \Big(-\ln 2 + \frac{\pi}{2} - J \Big) = -\frac{1}{3} \ln^2 2 - \frac{4}{3} \ln 2 + \frac{2}{3} \pi - \frac{4}{3} J,$$

одакле следи дата једнакост.

71. Ако је I дати интеграл, тада је

$$I = \int_0^1 \frac{x+1-1}{(x+1)^2} dx = \int_0^1 \frac{e^x dx}{x+1} - \int_0^1 \frac{e^x dx}{(x+1)^2} = J - K.$$

Када на интеграл K применимо парцијалну нтеграцију са

$$\begin{array}{c|c} u = e^x & dv = \dfrac{dx}{(x+1)^2} \\ \hline du = e^x dx & v = -\dfrac{1}{x+1} \end{array}$$

добијамо да је

$$K = -\frac{e^x}{x+1} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^x dx}{x+1} = -\frac{e}{2} + 1 + J.$$

Према томе, $I = J + e/2 - 1 - J = e/2 - 1$.

72. Најпре имамо да је

$$I = \int_0^1 \frac{(x+1-2)e^x}{(x+1)^3} dx = \int_0^1 \frac{e^x dx}{(x+1)^2} - 2 \int_0^1 \frac{e^x dx}{(x+1)^3} = J - 2K.$$

Ако на интеграл K применимо парцијалну интеграцију са

$$\begin{array}{c|c} u = e^x & dv = \dfrac{dx}{(x+1)^3} \\ \hline du = e^x dx & v = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{(x+1)^2} \end{array}$$

добијамо да је

$$K = -\frac{1}{2} \cdot \frac{e^x}{(x+1)^2}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{e^x dx}{(x+1)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{e}{4} - 1\right) + \frac{1}{2}J.$$

Заменом израза за K у једнакости $I = J - 2K$ налазимо да је $I = \frac{e}{4} - 1$.

73. Интегранд f није дефинисан у тачки $x = 0$, али је $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = 0$, што значи да је функција f Риман интеграбилна[5]. Парцијалном интеграцијом са $u = x - \arctan x$ и $dv = \frac{dx}{x^2}$ имамо да је

$$I = \frac{\arctan x - x}{x}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{2}{2}\ln 2.$$

74. Како је $\frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}$, то је

$$I = \int_0^1 \frac{x - \arctan x}{x^2} dx - \int_0^1 \frac{x - \arctan x}{1+x^2} dx = J - K.$$

Према претходном задатку је $J = \frac{\pi}{4} - 1 + \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2}$, а за интеграл K имамо да је

$$K = \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} - \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} - \frac{1}{2}\arctan^2 x\Big|_0^1 = \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} - \frac{\pi^2}{32}.$$

Према томе, $I = \frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi}{4} - 1$.

75. Интегранд f није дефинисан у тачки $x = 0$, али је $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = 1/3$, што значи да је функција f Риман интеграбилна. Парцијалном интеграцијом са $u = x - \arctan x$ и $dv = \frac{dx}{x^3}$ имамо да је

$$\begin{aligned}
I &= (x - \arctan x) \cdot \frac{1}{-2x^2}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2x^2}\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{x - \arctan x}{x^2}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\arctan x\Big|_0^1 \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

76. Парцијалном интеграцијом са $u = x$ и $dv = \cot x dx$ имамо да је $du = dx$ и $v = \ln\sin x$, па је

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{xdx}{\tan x} = x \cdot \ln\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \ln\sin x dx = -J,$$

где је $J = \int_0^{\pi/2} \ln\sin x dx$. Несвојствени интеграл J може да се израчуна и једнак је $-\frac{\pi}{2}\ln 2$. Према томе, $I = \frac{\pi}{2}\ln 2$.

[5] Приметимо да функције $x \mapsto 1/x$ и $x \mapsto \arctan x/x^2$ нису Риман интеграбилне на $[0,1]$, али њихова разлика јесте Риман интеграбилна на том интервалу.

77. Парцијалном интеграцијом са

$$\begin{array}{c|c} u=(\arccos x - x\sqrt{1-x^2})^2 & dv = dx \\ \hline du = -4\sqrt{1-x^2}(\arccos x - x\sqrt{1-x^2})dx & v = x \end{array}$$

имамо да је

$$I = x(\arccos x - x\sqrt{1-x^2})^2 \Big|_{-1}^{1} + 4\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}(\arccos x - x\sqrt{1-x^2})dx.$$

Новом парцијално интеграцијом са

$$\begin{array}{c|c} u=\arccos x - x\sqrt{1-x^2} & dv = x\sqrt{1-x^2}dx \\ \hline du = -2\sqrt{1-x^2}dx & v = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} \end{array}$$

добијамо да је

$$I = \pi^2 - \frac{1}{12}(1-x^2)^{3/2}(\arccos x - x\sqrt{1-x^2})\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{6}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^2 dx = \pi^2 - \frac{128}{45}.$$

78. Парцијалном интеграцијом са $u = \ln^n x$ и $dv = xdx$ имамо да је

$$I_n = \frac{x^2}{2}\ln^n x\Big|_1^e - \frac{n}{2}\int_1^e x\ln^{n-1} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2}I_{n-1}.$$

79. Ако је $u = \ln^n x$ и $dv = x^2dx$, тада је

$$du = n\ln^{n-1} x\cdot\frac{dx}{x}, \quad v = \frac{x^3}{3},$$

па је

$$I_n = \frac{x^3}{3}\ln^n x\Big|_0^1 - \frac{n}{3}\int_0^1 x^2\ln^{n-1} xdx = -\frac{n}{3}I_{n-1}.$$

Како је $I_0 = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$, то је

$$I_n = (-1)^n\frac{n!}{3^n}I_0 = (-1)^n\frac{n!}{3^{n+1}}.$$

80. Ако је $u = \ln^n x$ и $dv = x^a dx$, тада је

$$du = n\ln^{n-1} x\cdot\frac{dx}{x}, \quad v = \frac{x^{a+1}}{a+1},$$

па је

$$I_n = \frac{x^{a+1}}{a+1}\ln^n x\Big|_0^1 - \frac{n}{a+1}\int_0^1 x^a\ln^{n-1} xdx = -\frac{n}{a+1}I_{n-1}.$$

Како је $I_0 = \int_0^1 x^a dx = \frac{1}{m+1}$, то је

$$I_n = (-1)^n\frac{n!}{(a+1)^n}I_0 = (-1)^n\frac{n!}{(a+1)^{n+1}}.$$

81. Парцијалном интеграцијом са

$u = \ln(\cos x)$	$dv = \cos 2nx dx$
$du = -\tan x dx$	$v = \dfrac{\sin 2nx}{2n}$

добијамо да је

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{2}\ln(\cos x)\sin 2nx\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2n}\int_0^{\pi/2}\sin 2nx\tan x dx \\ &= \frac{1}{2n}\int_0^{\pi/2}\sin 2nx\tan x dx \\ &= \frac{1}{2n}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2nx\sin x}{\cos x}dx \\ &= \frac{1}{4n}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(2n-1)x-\cos(2n+1)x}{\cos x}dx \\ &= \frac{1}{4n}(J_{n-1}-J_n). \end{aligned}$$

Напомена. Може се доказати да је $J_n = \dfrac{(-1)^n}{2}\pi$. Из дате једнакости тада добијамо да је $I_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{4n}\pi$.

82. За $u = (1-x^2)^n$ и $dv = dx$ имамо да је $du = -2n(1-x^2)^{n-1}x dx$ и $v = x$, па је

$$\begin{aligned} I_n &= (1-x^2)^n x\big|_0^1 + 2n\int_0^1 x^2(1-x^2)^{n-1}dx \\ &= 2n\int_0^1(1-x^2)^{n-1}dx - 2n\int_0^1(1-x^2)^n dx \\ &= 2nI_{n-1} - 2nI_n. \end{aligned}$$

Из ових једнакости добијамо да је

$$I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2(n-1)}{2n-1}\cdot\frac{2(n-2)}{2n-3}\cdots\frac{2\cdot 2}{2\cdot 2+1}\cdot I_1.$$

Како је $I_1 = \int_0^1(1-x^2)dx = 2/3$, то је[6]

$$I_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{2^n\cdot n!}{3\cdot 5\cdots(2n+1)} = \frac{2^n\cdot n!\cdot 2\cdot 4\cdots 2n}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}\cdot n!^2}{(2n+1)!}.$$

83. Ако је $J_n = \displaystyle\int_0^1 x^2(1-x^2)^{n/2}dx$, тада је

$$I_{n+2} = \int_0^1(1-x^2)^{\frac{n+2}{n}}dx = \int_0^1(1-x^2)(1-x^2)^{n/2}dx = I_n - J_n.$$

Када на интеграл J_n применимо парцијалну интеграцију са

[6] Ако на $(1-x^2)^n$ применимо биномну формулу, а затим израчунамо дати интеграл, добијамо да је

$$1 - \frac{1}{3}\binom{n}{1} + \frac{1}{5}\binom{n}{2} - \frac{1}{7}\binom{n}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}\binom{n}{n} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

$u = x$	$dv = x(1-x^2)^{n/2}dx$
$du = dx$	$v = \dfrac{1}{n+2}(1-x^2)^{\frac{n+2}{2}}$

добијамо да је

$$I_{n+2} = I_n - \frac{x(1-x^2)^{\frac{n+2}{2}}}{n+2}\Big|_0^1 - \frac{1}{n+2}I_{n+2} = I_n - \frac{1}{n+2}I_{n+2}.$$

Из последње једнакости следи да је $I_{n+2} = \dfrac{n+2}{n+3}I_n$.

Пошто је $I_0 = 1$ и $I_1 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \dfrac{\pi}{4}$, за паран број[7] n имамо да је $I_n = \dfrac{n!!}{(n+1)!!}$, а за непаран број n имамо да је $I_n = \dfrac{n!!}{(n+1)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}$.

84. Најпре имамо да је

$$I_n = \int_0^a (a^2-x^2)^{n-1}(a^2-x^2)dx = a^2 I_{n-1} - J.$$

Када на интеграл J применимо парцијалну интеграцију са

$u = x$	$dv = x(a^2-x^2)^{n-1}dx$
$du = dx$	$v = -\dfrac{1}{2n}(a^2-x^2)^n$

добијамо да је

$$J = -\frac{x}{2n}(a^2-x^2)^n\Big|_0^a + \frac{1}{2n}\int_0^a (a^2-x^2)^n dx = \frac{1}{2n}I_n.$$

Сада је $I_n = a^2I_{n-1} - \dfrac{1}{2n}I_n$, па је $I_n = \dfrac{2n}{2n+1}a^2I_{n-1}$, односно

$$I_n = \frac{2n}{2n+1}a^2I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2(n-1)}{2(n-1)+1}a^4I_{n-2} = \cdots = a^{2n}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}I_0.$$

Како је $I_0 = \int_0^a dx = a$, то је $I_n = a^{2n+1}\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

85. За $u = x^n$ и $dv = \sqrt{1-x}dx$ имамо да је $du = nx^{n-1}$ и $v = -\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}$. Како су функције u и v непрекидно диференцијабилне на $[0,1]$, може да се примени парцијална интеграција, па је

$$\begin{aligned}
I_n &= -\frac{2}{3}x^n(1-x)^{3/2}\Big|_0^1 + \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{2/3}dx \\
&= \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}dx \\
&= \frac{2n}{3}\left[\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}dx - \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx\right] \\
&= \frac{2n}{3}\left(I_{n-1} - I_n\right).
\end{aligned}$$

[7]За $n = 2k$ интеграл је једнак интегралу I_k из претходног задатка.

Према томе, за $n \geq 1$ важи $I_n = \dfrac{2n}{2n+3} I_{n-1}$. Из ове једнакости следи да је

$$I_n = \frac{2n}{2n+3} \cdot \frac{2n-2}{2n+1} \cdots \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1 + 3} \cdot I_0.$$

Како је

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx = -\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3},$$

то је[8] $I_n = \dfrac{2^{n+1} n!}{(2n+3)!!}$.

86. Парцијалном интеграцијом са $u = \sin^{n-1} x$ и $dv = \sin x dx$ имамо да је

$$du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx, \quad v = -\cos x,$$

па је

$$\begin{aligned} I_n &= -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x dx \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n). \end{aligned}$$

Из једнакости $I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$ добијамо дату једнакост.

Како је

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = 1,$$

применом дате једнакости за $n = 2m$ налазимо да је

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0 = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2},$$

а за $n = 2m+1$

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

Напомена. На сличан начин се доказује да се исти резултат добија и за интеграл $J = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$. То се такође лако види и из датог интеграла јер се сменом $x = \pi/2 - t$ добија да је $J_n = I_n$.

87. Парцијалном интеграцијом са $u = x^{n-1}$ и $dv = \dfrac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$ имамо

$$du = (n-1)x^{n-2}, \quad v = \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2},$$

[8] Израз за I_n може да се запише и без дуплих факторијела, $I_n = \dfrac{n!(n+2)!}{(2n+4)!} 2^{2n+3}$.

па је

$$\begin{aligned}
I_n &= x^{n-1}\sqrt{1+x^2}\,\Big|_0^1 - (n-1)\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}dx \\
&= \sqrt{2} - (n-1)\int_0^1 x^{n-1}\frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx \\
&= \sqrt{2} - (n-1)\int_0^1 \frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{1+x^2}} + (n-1)\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1+x^2}} \\
&= \sqrt{2} - (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.
\end{aligned}$$

Из ових једнакости следи да је $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$.

88. Узимајући $u = x^{n-2}$ и $dv = \dfrac{x^2dx}{\sqrt{x^3+1}}$ имамо да је

$$du = (n-2)x^{n-3}, \quad v = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{x^3+1}{\sqrt{x^3+1}}.$$

Применом парцијалне интеграције добијамо

$$I_n = \frac{2}{3}x^{n-2}\sqrt{x^3+1}\,\Big|_0^1 - \frac{2n-4}{3}I_n - \frac{2n-4}{3}I_{n-3}.$$

Из ове једнакости следи да је

$$(2n-1)I_n + (2n-4)I_{n-3} = 2x^{n-2}\sqrt{x^3+1}\,\Big|_0^1 = 2\sqrt{2}.$$

Пошто је

$$I_n = \frac{2\sqrt{2}-(2n-4)I_{n-3}}{2n-1}, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+1}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}\,\Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}-2}{3},$$

па је

$$I_5 = \frac{2\sqrt{2}-6I_2}{9} = \frac{4-2\sqrt{2}}{9}, \quad I_8 = \frac{2\sqrt{2}-12I_5}{15} = \frac{14\sqrt{2}-16}{45}.$$

89. Парцијалном интеграцијом са $u = \sin(\pi x)$ и $dv = x^n dx$ имамо да је

$$I_n = \frac{x^{n+1}}{n+1}\,\Big|_0^1 - \frac{\pi}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}\cos(\pi x)dx.$$

Новом парцијалном интеграцијом са $u = \cos(\pi x)$ и $dv = x^{n+1}dx$ добијамо да је

$$I = -\frac{\pi}{(n+1)(n+2)}\left(x^{n+2}\cos(\pi x)\,\Big|_0^1 + \pi\int_0^1 x^{n+2}\sin(\pi x)dx\right),$$

одакле следи дата једнакост.

90. Парцијалном интеграцијом са

$u = x^{2n}$	$dv = \sin x dx$
$du = 2nx^{2n-1}dx$	$v = -\cos x$

имамо да је

$$I_n = -x^{2n}\cos x\Big|_0^{\pi} + 2n\int_0^{\pi} x^{2n-1}\cos x dx = \pi^{2n} + 2n\int_0^{\pi} x^{2n-1}\cos x dx.$$

Новом парцијалном интеграцијом са

$u = x^{2n-1}$	$dv = \cos x dx$
$du = (2n-1)x^{2n-2}dx$	$v = \sin x$

добијамо да је

$$I_n = \pi^{2n} + 2n^{2n-1}\sin x\Big|_0^{\pi} - 2n(2n-1)\int_0^{\pi} x^{2n-2}\sin x dx = \pi^{2n} - 2n(2n-1)I_{n-1}.$$

91. Парцијалном интеграцијом са

$u = x^n$	$dv = sin(2k+1)xdx$
$du = nx^{n-1}dx$	$v = -\dfrac{\cos(2k+1)x}{2k+1}$

имамо да је

$$I_n = -\frac{x^n\cos(2k+1)x}{2k+1}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{n}{2k+1}\int_0^{\pi/2} x^{n-1}\cos(2k+1)xdx.$$

Још једном парцијалном интеграцијом са

$u = x^{n-1}$	$dv = \cos(2k+1)xdx$
$du = (n-1)x^{n-2}dx$	$v = \dfrac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$

добијамо да је

$$I_n = \frac{n}{2k+1}\left[\frac{x^{n-1}\sin(2k+1)x}{2k+1}\Big|_0^{\pi/2} - \frac{n-1}{2k+1}\int_0^{\pi/2} x^{n-2}\sin(2k+1)xdx\right],$$

одакле следи дата једнакост.

Како је $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\sin 3xdx = -\frac{1}{9}$, то је

$$\int_0^{\pi/2} x^3\sin 3xdx = I_3 = -\frac{1}{12}\pi^2 - \frac{2}{3}I_1 = -\frac{1}{12}\pi^2 + \frac{2}{27}.$$

92. Сменом $\sqrt{x} = t$ имамо да је $I_n = 2\displaystyle\int_0^1 t^{2n+1}e^t dt$. Ако сада применимо парцијалну интеграцију са $u = t^{2n+1}$ и $dv = e^t dt$ добијамо

$$I_n = 2t^{2n+1}e^t\Big|_0^1 - 2(2n+1)\int_0^1 t^{2n}e^t dt.$$

Новом парцијалном интеграцијом са $u = t^{2n}$ и $dv = e^t dt$ налазимо да је

$$I_n = 2e - 2(2n+1)\left[t^{2n}e^t\Big|_0^1 - 2n\int_0^1 t^{2n-1}e^t dt\right] = 2e - 2(n+1)e + 4n(2n+1)I_{n-1},$$

одакле следи дата једнакост.

93. Парцијалном интеграцијом са $u = x^n$ и $dv = \cos x dx$ имамо да је

$$I_n = nx^{n-1}\sin x\Big|_0^\pi - n\int_0^\pi x^{n-1}\sin x dx = -n\int_0^\pi x^{n-1}\sin x dx.$$

Новом парцијалном интеграцијом добијамо да је

$$\int_0^\pi x^{m-1}\sin x dx = -x^{n-1}\cos x\Big|_0^\pi + (n-1)\int_0^\pi x^{n-2}\cos x dx = \pi^{n-1} + (n-1)I_{n-2}.$$

Из ових једнакости следи дата једнакост.

94. Парцијалним интеграцијом са $u = (1-x)^{n-1}$ и $dv = x^{m-1}dx$ имамо да је

$$du = -(n-1)(1-x)^{n-2}dx, \quad v = \frac{x^{m-1}}{m},$$

па је

$$B(m,n) = \frac{x^m}{m}(1-x)^{n-1}\Big|_0^1 + \frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-2}dx = \frac{n-1}{m}B(m+1,n-1).$$

На основу ове једнакости добијамо да је

$$\begin{aligned} B(m,n) &= \frac{n-1}{m}\cdot\frac{n-2}{m+1}B(m+2,n-2) \\ &= \frac{n-1}{m}\cdot\frac{n-2}{m+1}\cdots\frac{1}{m+n-2}B(m+n-1,1). \end{aligned}$$

Како је $B(m+n-1,1) = \int_0^1 x^{m+n-2}dx = \dfrac{1}{m+n-1}$, то је[9]

$$B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

95. Парцијалном интеграцијом са $u = \sin^{2m} x\cos^{2n-1} x$ и $dv = \cos x dx$ имамо да је

$$\begin{aligned} I(m,n) &= \sin^{2m+1} x\cos^{2n-1} x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\left[2m\sin^{2m} x\cos^{2n} x - (2n-1)\sin^{2m+2} x\cos^{2n-2} x\right]dx \\ &= -2m\int_0^{\pi/2}\sin^{2m} x\cos^{2n} x dx + (2n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{2m+2} x\cos^{2n-2} x dx \\ &= -2mI(m,n) + (2n-1)I(m+1,n-1). \end{aligned}$$

Из последње једнакости добијамо да је

$$I(m,n) = \frac{2n-1}{2m+1}I(m+1,n-1),$$

па је

$$I(m,n) = \frac{(2n-1)!!}{(2m+1)(2m+3)\cdots(2m+2n-1)}I(m+n,0).$$

[9] Ако на $(1-x)^{n-1}$ применимо биномну формулу, а затим израчунамо дати интеграл, добијамо да је

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+m}\binom{n-1}{k} = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

Из ове једнакости и једнакости (на основу једног од претходних задатака)

$$I(m+n,0)=\int_0^{\pi/2}\sin^{2m+2n}xdx=\frac{(2m+2n-1)!!}{(2m+2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

следи да важи дата једнакост.

96. Парцијалном интеграцијом са

$$\begin{array}{c|c} u=\arcsin^n x & dv=dx \\ \hline du=\dfrac{n\arcsin^{n-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx & v=x \end{array}$$

имамо

$$I_n=x\arcsin^n x\Big|_0^1-n\int_0^1\frac{x\arcsin^{n-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\left(\frac{\pi}{2}\right)^n-nJ.$$

Када и на интеграл J применимо парцијалну интеграцију са

$$\begin{array}{c|c} u=\arcsin^{n-1}x & dv=\dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \\ \hline du=\dfrac{(n-1)\arcsin^{n-2}x}{\sqrt{1-x^2}}dx & v=-\sqrt{1-x^2} \end{array}$$

добијамо да је

$$J=-\sqrt{1-x^2}\arcsin^{n-1}x\Big|_0^1+(n-1)\int_0^1\arcsin^{n-2}xdx=(n-1)I_{n-2}.$$

Према томе, $I_n=\left(\frac{\pi}{2}\right)^n-n(n-1)I_{n-2}$, одакле следи дата једнакост.

97. Парцијалном интеграцијом са $u=\arctan x$ и $dv=x^ndx$ имамо да је

$$I=\frac{x^{n+1}}{n+1}\arctan x\Big|_0^1-\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x^2+1}dx=\frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{4}-J_{n+1}\right).$$

За интеграл J_n важи

$$J_n=\int_0^1\frac{x^n+x^{n-2}-x^{n-2}}{x^2+1}dx=\int_0^1x^{n-2}-\int_0^1\frac{x^{n-2}}{x^2+1}dx=\frac{1}{n-1}-J_{n-1}.$$

98. Према претходном задатку важи $I_n==\frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{4}-J_{n+1}\right)$. Како је

$$\frac{1}{2(n+2)}=\int_0^1\frac{x^{n+1}}{2}dx<\int_0^1\frac{x^n\cdot x}{x^2+1}dx<\frac{1}{2}\int_0^1x^ndx=\frac{1}{2n+2},$$

то је

$$\frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2(n+1)}\right)<I_n<\frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2(n+2)}\right).$$

Из ових неједнакости следи да је

$$-\frac{n}{2(n+1)}<n\left((n+1)I_n-\frac{\pi}{4}\right)<-\frac{n}{2(n+2)},$$

одакле добијамо дату граничну вредност.

99. Ако у интегралу I_{n+1} применимо парцијалну унтеграцију са $u = \arctan^{n+1} x$ и $dv = dx$, добијамо да је

$$I_{n+1} = x\arctan^{n+1} x\Big|_0^1 - (n+1)\int_0^1 x\arctan^n x dx \geq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} - (n+1)I_n.$$

100. Парцијалном интеграцијом са

$u = \arctan^n x$	$dv = xdx$
$du = \dfrac{n\arctan^{n-1} x}{1+x^2}dx$	$v = \dfrac{x^2}{2}$

имамо да је

$$I = \frac{x^2}{2}\arctan^n x\,\Big|_0^1 - \frac{n}{2}\int_0^1 \frac{x^2\arctan^{n-1} x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n - \frac{n}{2}K.$$

Како је

$$K = \int_0^1 \arctan^{n-1} x dx - \int_0^1 \frac{\arctan^{n-1} x}{1+x^2}dx = J_{n-1} - \frac{1}{n}\arctan^n x\,\Big|_0^1 = J_{n-1} - \frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n,$$

то је

$$I_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n - \frac{n}{2}\left(J_{n-1} - \frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n\right) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^n - \frac{n}{2}J_{n-1},$$

а одавде следи дата једнакост.