1. Одредити вредност реалног параметра A тако да функција

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^4-x^4y-x^2y^2+2y^2}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ A, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

буде непрекидна у тачки (0,0). За тако одређену функцију израчунати $f'_x(0,0)$ и $f'_y(0,0)$.

Решење:

1. Пошто је $f(x,y)=\dfrac{2x^4+2y^2-x^4y-x^2y^2}{x^4+y^2}=2-\dfrac{x^4y+x^2y^2}{x^4+y^2}$ и важи

$$0\le\left|\frac{x^4y+x^2y^2}{x^4+y^2}\right|\le\frac{x^4|y|+x^2y^2}{x^4+y^2}\le\frac{x^4|y|}{x^4}+\frac{x^2y^2}{y^2}=|y|+x^2\to 0,$$

кад $(x,y)\to(0,0)$, то је $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4y+x^2y^2}{x^4+y^2}=0$ тј. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=2$.

Дакле, функција ће бити непрекидна у тачки $(0,0)$ за $A=2$. Тада за парцијалне изводе важи:

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{2\Delta x^4}{\Delta x^4}-2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2-2}{\Delta x}=0,$$
$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{2\Delta y^2}{\Delta y^2}-2}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{2-2}{\Delta y}=0.$$

НАПОМЕНА 1 Уколико $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ постоји, тада је једнак лимесу по произвољном правцу који пролази кроз $(0,0)$. То се може искористити да се закључи која је у том случају вредност параметра A. Нпр. ако посматрамо правац $y=x^2$, тада је:

$$\lim_{x\to 0}f(x,x^2)=\lim_{x\to 0}\frac{4x^4-x^6}{2x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^4(1-x^2/4)}{2x^4}=2,$$

па је једини кандидат $A=2$. Ипак, потребно је, као у горњем решењу, утврдити да је 2 заиста гранична вредност, независно од избора правца.

НАПОМЕНА 2 Грешка која се највише правила на колоквијуму је била варијација на закључак да из следећег низа неједнакости:

$$\begin{aligned}0\le|f(x,y)|&=\left|\frac{2x^4-x^4y-x^2y^2+2y^2}{x^4+y^2}\right|\le\frac{2x^4+x^4|y|+x^2y^2+2y^2}{x^4+y^2}\\&\le\frac{2x^4}{x^4}+\frac{x^4|y|}{x^4}+\frac{x^2y^2}{y^2}+\frac{2y^2}{y^2}=4+|y|+x^2\to 4,\quad\text{кад }(x,y)\to(0,0),\end{aligned}$$

следи да је $A=4$, што нема основа. Дакле, ако је гранична вредност дефинисана, тада важи $0\le\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}|f(x,y)|\le 4$, али ништа више од тога не можемо закључити.