МАТЕМАТИКА 2

Први колоквијум, април 2019 - група 3

Драган Ђорић

1. Испитати диференцијабилност функције

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(y-x)^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

у тачки $(0,0)$.

Решење. Како је

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^3}{x^3} = -1,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(0,x) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^3} = 1,$$

функција f је диференцијабилна у тачки $(0,0)$ акко је $f(x,y)+x-y = o(\sqrt{x^2+y^2})$ када $x \to 0$ и $y \to 0$.

Нека је $g(x,y) = \dfrac{f(x,y)+x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Пошто је $g(x,-x) = \sqrt{2}$ за $x < 0$, функција g не тежи нули када $(x,y) \to (0,0)$. Према томе, функција f није диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

2. Написати Тејлоров полином другог степена који у околини тачке $B(1,0)$ апроксимира функцију

$$f(x,y) = \arctan \frac{x+3y}{1-3xy}.$$

Решење. Тражени Тејлоров полином T_2 дат је са

$$T_2(x,y) = f(B) + df(B) + \frac{1}{2} d^2 f(B).$$

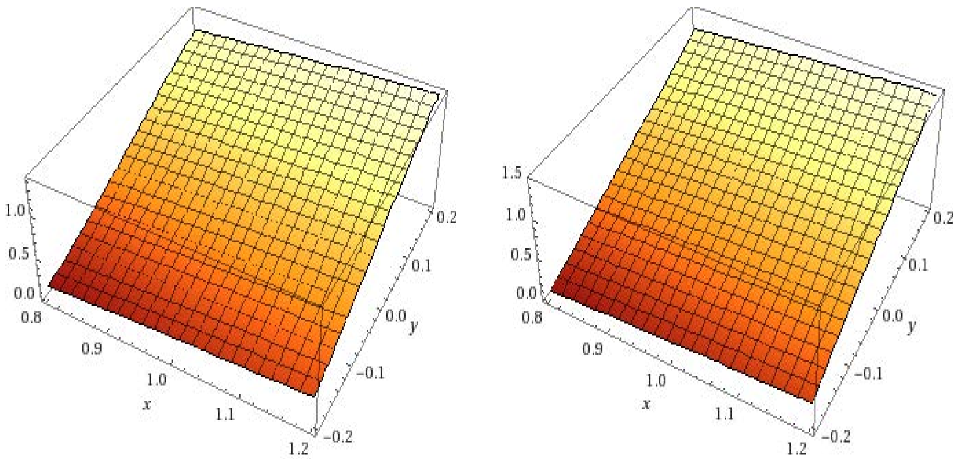
Како је

$$f'_x = \frac{1}{1+x^2}, \quad f'_y = \frac{3}{1+9y^2}, \quad f''_{x^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad f''_{y^2} = -\frac{54y}{(1+9y^2)^2}, \quad f''_{xy} = 0,$$

то је $df(B) = \frac{1}{2}dx + 3dy$ и $d^2f(B) = -\frac{1}{2}dx^2$, па је

$$T_2(x,y) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) + 3y - \frac{1}{4}(x-1)^2 = \frac{\pi}{4} + x + 3y - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}.$$

На следећој слици се могу упредити вредности функције f и Тејлоровог полинома T_2 у околини тачке B.



Сл.1 График функције f (лево) и Тејлоровог полинома T_2 (десно)

3. Одредити све локалне екстремуме функције $f : (x, y) \mapsto xy - 1$ при услову $x^3 + y^3 - 16 = 0$.

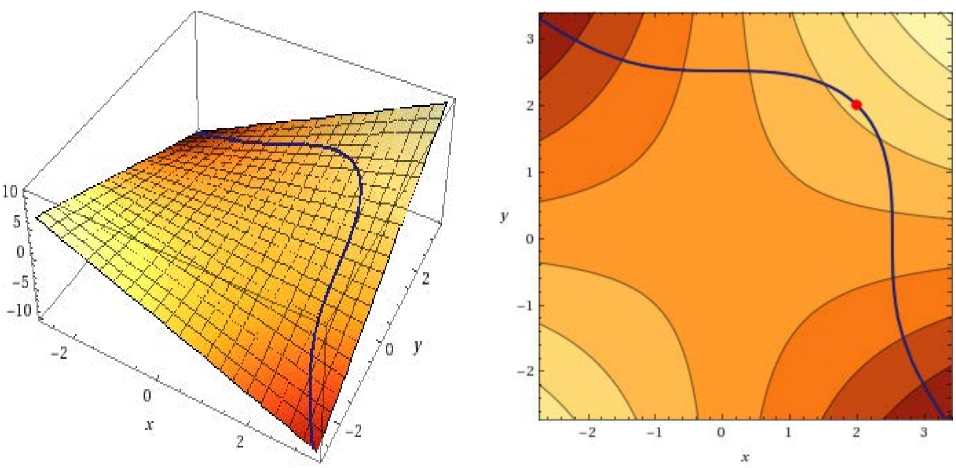
Решење. Из датог услова имамо да је $y = \sqrt[3]{16 - x^3}$. Ако овај израз за y заменимо у функцији f, добијамо да је $f(x, y) = x\sqrt[3]{16 - x^3} - 1 = g(x)$.

Како је

$$g'(x) = (16 - x^3)^{1/3} - x^3(16 - x^3)^{-2/3} = \frac{16 - 2x^3}{(16 - x^3)^{2/3}},$$

критичне тачке функције g су $x = 2$ и $x = 2\sqrt[3]{2}$. Из чињенице да g расте за $x < 2$ и опада за $x > 2$ следи да функција g има максимум у тачки $x = 2$ и нема других локалних екстремума.

Према томе, функција f при датом услову има само један локални екстремум, $f_{\max} = f(A) = 3$, што се на следећим сликама јасно уочава.



Сл.2 График функције f (лево) и ниво линије функције f (десно)