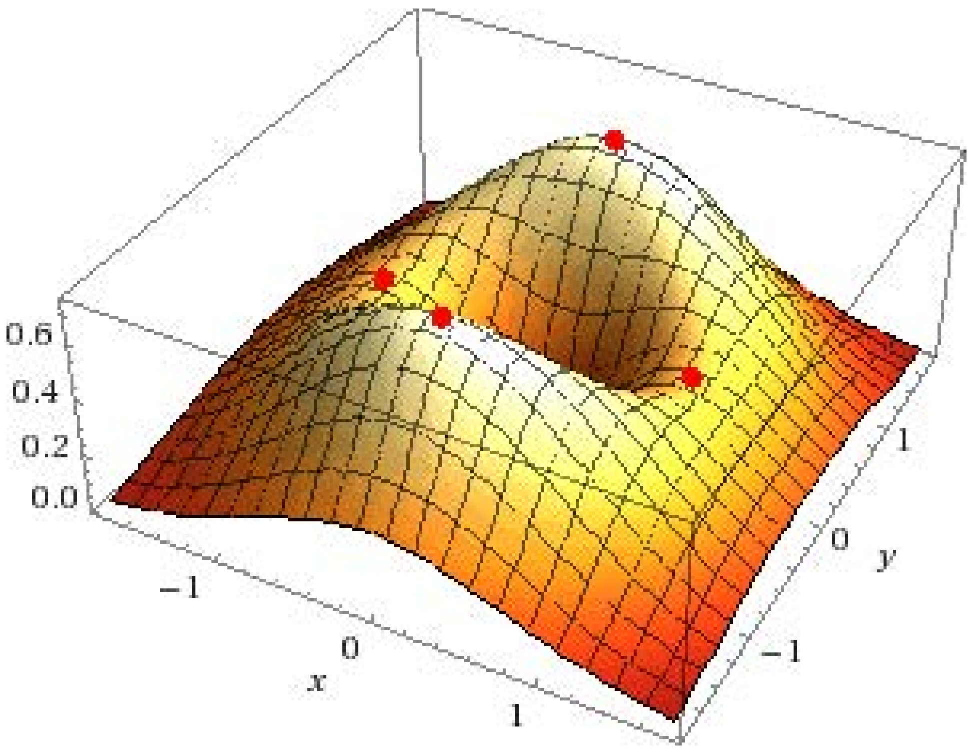
Драган Ђорић

# Локални екстремуми функција две променљиве

Задаци са решењима



Проф Драган Ђорић

*Студентима генерације 2018/2019*

Проф Драган Ђорић

Факултет организационх наука, Београд

# Локални екстремуми

## Експлицитно дефинисана функција

Нека је $f$ реална функција две променљиве која има непрекидне парцијалне изводе другог реда и нека је $A$ стационарна тачка (С.Т.) функције $f$, а $m_1$ и $m_2$ главни минори Хесеове матрице функције $f$ у тачки $A$.

- Довољан услов да $f$ у тачки $A$ има локални минимум је $d^2f(A) > 0$ за $dx^2+dy^2 \neq 0$. На основу Силвестеровог критеријума то је испуњено ако је $m_1 > 0$ и $m_2 > 0$.
- Довољан услов да $f$ у тачки $A$ има локални максимум је $d^2f(A) < 0$ за $dx^2+dy^2 \neq 0$. На основу Силвестеровог критеријума то је испуњено ако је $m_1 < 0$ и $m_2 > 0$.
- Довољан услов да $f$ у тачки $A$ нема локални екстремум (ЛЕ) је да $d^2f(A)$ мења знак. На основу Силвестеровог критеријума то је испуњено ако је $m_2 < 0$

У осталим случајевима, као и у случају критичне тачке која није стационарна, постојање локалног екстремума се проверава на основу дефиниције.

Наведени довољни услови се често изражавају помоћу $a$, $b$ и $c$ (уместо $m_1$ и $m_2$), где је $a = f''_{x^2}(A)$, $b = f''_{xy}(A)$ и $c = f''_{y^2}(A)$. Тада је $m_1 = a$ и $m_2 = ac - b^2$, па важи:

- у тачки $A$ је строги локални минимум ако је $a > 0$ и $ac - b^2 > 0$,
- у тачки $A$ је строги локални максимум ако је $a < 0$ и $ac - b^2 > 0$,
- у тачки $A$ нема локалног екстремума ако је $ac - b^2 < 0$.

Доказати да дата функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ у тачки $(0,0)$ нема локални екстремум.

**1.** $f(x,y) = x^2 - 2xy + 4y^3$.

**2.** $f(x,y) = 3x^2y - x^3 - y^4$.

**3.** $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

**4.** $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

Доказати да дата функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ има у $(0,0)$ минимум дуж сваке праве која садржи тачку $(0,0)$, али нема локални екстремум у $(0,0)$.

**5.** $f(x,y) = 2x^2 - 3xy^2 + y^4$.

**6.** $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$.

**7.** Доказати да функција $f : (x, y) \mapsto y^5 - x^2 - y^2 + 2xy$ у тачки $(0, 0)$ нема локални екстремум дуж праве $y = x$, а има локални максимум дуж сваке друге праве која садржи тачку $(0, 0)$

У следећим задацима за дату функцију $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ одредити све локалне екстремуме.

**8.** $f(x, y) = x + y - x^2 - y^2 - xy$.

**9.** $f(x, y) = 4(x - y) - x^2 - y^2$.

**10.** $f(x, y) = x^2 + y^2 + (ax + by + c)^2,\ a, b, c \in \mathbb{R}$.

**11.** $f(x, y) = x^2 - x + xy^2 - xy$.

**12.** $f(x, y) = x^2y + xy^2 - xy$.

**13.** $f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2$.

**14.** $f(x, y) = -x^2 + (y - 1)xy$

**15.** $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

**16.** $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 1$.

**17.** $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

**18.** $f(x, y) = x^3 + y^3 - 12x - 12y + 6xy$.

**19.** $f(x, y) = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$.

**20.** $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

**21.** $f(x, y) = x^3 + xy^2 + y^2 + 2x^2$.

**22.** $f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430$

**23.** $f(x, y) = x^3 + y^3 + (x - y)^2$.

**24.** $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$.

**25.** $f(x, y) = (x - 1)(y - 2)(x + y - 6)$.

**26.** $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^3 - \dfrac{y^4}{4}$.

**27.** $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$.

**28.** $f(x, y) = (x - 8y)^2 - x^4 - y^4$.

**29.** $f(x, y) = xy(5 - 2x^2 - y^2)$.

**30.** $f(x, y) = x^5 + 3x^3y + 3y^3x + y^5$.

**31.** $f(x, y) = x^3y^2(1 - x - y)$.

**32.** $f(x, y) = x^2y^3(6 - x - y)$.

**33.** $f(x, y) = x^3y^2(12 - x - y), \quad x > 0,\ y > 0$.

**34.** $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$.

**35.** $f(x,y) = (x+1)^2 y e^{-x+y}$.

**36.** $f(x,y) = (y^2 - 3x^2)e^{x+y}$.

**37.** $f(x,y) = (2x^2 + y^2)e^{-x+y}$.

**38.** $f(x,y) = x^2 y e^{x+y},\ x \neq 0$.

**39.** $f(x,y) = (x^2 - xy - y^2)e^{x+y}$

**40.** $f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2xy + 2y^2)$.

**41.** $f(x,y) = e^{x+2y}(x^2 - y^2)$.

**42.** $f(x,y) = xe^{-(x^2+y^2)}$.

**43.** $f(x,y) = xye^{y-x^2/2}$.

**44.** $f(x,y) = (5 - 2x + y)e^{x^2-y}$.

**45.** $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-x^2/4}$.

**46.** $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-x^2/2-y^2/2}$.

**47.** $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}(x^2 + 2y^2)$.

**48.** $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}(x - 2y)$.

**49.** $f(x,y) = xy\, e^{-x^2-y^2}$.

**50.** $f(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)/2}$.

**51.** $f(x,y) = (3x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

**52.** $f(x,y) = (ax^2 + by^2)\, e^{-x^2-y^2},\ a, b \in \mathbb{R},\ ab(a-b) \neq 0$.

**53.** $f(x,y) = e^{xy}(x^2 + 2xy + 4y^2)$.

**54.** $f(x,y) = 2 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$.

**55.** $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2 + 2y^2 + 6}$.

**56.** $f(x,y) = \dfrac{ax + by + c}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}, \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

**57.** $f(x,y) = x + y - \dfrac{3}{2}\ln(x^2 + y^2 + 1)$.

**58.** $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$.

**59.** За функцију $f : (0, \pi/4)^2 \to \mathbb{R}$, дефинисану са $f(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$, одредити све локалне екстремуме.

У следећим задацима за дату функцију $f : D_f \to \mathbb{R}$, где је $D_f \subset \mathbb{R}^2$ област дефинисаности функције $f$, одредити све локалне екстремуме.

**60.** $f(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x+y},\ x, y > 0$.

**61.** $f(x,y)=\dfrac{x+y-1}{x^2+y^2}$.

**62.** $f(x,y)=\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{x}+y$.

**63.** $f(x,y)=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y},\quad x>0,\ y>0$.

**64.** $f(x,y)=x^2+xy+y^2+\dfrac{a^3}{x}+\dfrac{a^3}{y},\quad a\in\mathbb{R}$.

**65.** $f(x,y)=x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}$.

**66.** $f(x,y)=xy\sqrt{12-4x^2-y^2}$.

**67.** $f(x,y)=x+y\sqrt{9-x^2-y^2}$.

**68.** $f(x,y)=3x^2-2x\sqrt{y}+y-4x+4,\ y\neq 0$.

**69.** $f(x,y)=x^2+y^2-2x-4\sqrt{xy}-2y+8,\ xy\neq 0$.

**70.** $f(x,y)=x^2-2x-y-\ln(2-y)+4$.

**71.** $f(x,y)=x^2+y^2-2\ln x-18\ln y$.

**72.** $f(x,y)=3\ln\dfrac{x}{6}+2\ln y+\ln(12-x-y)$.

**73.** $f(x,y)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y^2}+\ln(xy)$.

**74.** $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$.

**75.** $f(x,y)=x\ln(9x^2+y^2)-2x,\ x\neq 0$.

**76.** $f(x,y)=x\ \ln(x^2+y^2)$.

**77.** $f(x,y)=y\ln(4x^2+y^2)$.

**78.** $f(x,y)=2x-2y+\ln(2x-x^2-y^2)$.

**79.** $f(x,y)=-2x-2y+\ln(-2x-x^2-y^2)$.

**80.** $f(x,y)=\ln((x+y)(3x^2+3y^2-2))$.

**81.** $f(x,y)=x(\ln x+x+y^2)$.

У следећим задацима доказати да дата функција $f:D_f\to\mathbb{R}$, где је $D_f\subset\mathbb{R}^2$ област дефинисаности функције $f$, нема локалних екстремума.

**82.** $f(x,y)=x^2-xy-y^2$.

**83.** $f(x,y)=x^3-2x^2y^2+y^4$.

**84.** $f(x,y)=xy+\dfrac{1}{2(x+y)}$.

**85.** $f(x,y)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y^2}+\ln\dfrac{y}{x}$.

**86.** $f(x,y)=x^2y\ln x$.

**87.** $f(x,y)=xe^y+y\ln x$.

**88.** $f(x,y)=x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+3\arctan\dfrac{y}{x}$.

**89.** $f(x,y)=xe^{y+x\sin y}$.

## Имплицитно дефинисана функција

Потребни и довољни услови за локалне екстремуме функције две променљиве задате имплицитно исти су као и у случају функције која је задата експлицитно. Разлика постоји само у техници налажења парцијалних извода првог реда (за одређивање стационарних тачака) и парцијалних извода другог реда (за испитивање довољних услова).

У следећим задацима одредити све локалне екстремуме функције $f : (x, y) \mapsto z$ дефинисане имплицитно датом једнакошћу.

**90.** $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0.$

**91.** $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0.$

**92.** $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y - 14 = 0.$

**93.** $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0.$

**94.** $x^2 + y^2 + z^2 - 3xz - xy - 4x + 2y + 4z + 4 = 0.$

**95.** $z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0.$

**96.** $(x-1)^2 + y^3 + 6y^2 + 2z^2 + 2xz - 8 = 0.$

**97.** $2x^2 + y^2 - 2z^2 + 2xy + yz + 10 = 0.$

**98.** $8 - \dfrac{z^3}{3} + xyz + xy^2 + x^2y = 0, \quad xy \neq 0.$

**99.** $z^3 + z^2y - x^2 - y^2 + 4x - 4 = 0, \quad z \neq 0.$

**100.** $3xz + yz - \ln(3xy) = 2.$

**101.** $1 + 6x^2z + 3y^2z + z^3 = 0.$

**102.** $x^2z + y^2z - 2xz^2 - 2yz^2 = 2.$

**103.** $z^3 + xyz + x^2 + 2y^2 + 8 = 0.$

**104.** $3x^2 - 2xy + y^2 - 2z^2 - 4y + 8x + 8 = 0, \ z > 0.$

**105.** $x^2 + xy + y^2 + z^2 - 3y = 1, \ z > 0.$

**106.** $x^3 + (y-1)^2 + z^2 + 3xz + 2yz - 6x = 0.$

## Р е ш е њ а

**1.** Тачка $A(0,0)$ је стационарна тачка, $f(0,y)=4y^3\begin{cases}>0, & y>0\\<0, & y<0\end{cases}$, док је $F(A)=0$.

*Напомена.* Функција има још једну стационарну тачку $B(1/6,1/6)$. Како је $f''_{x^2}=2$, $f''_{xy}=-2$, $f''_{y^2}=24y$, то је

$$d^2f(A)=2dx^2-4dxdy,\quad d^2f(B)=2dx^2-4dxdy+4dy^2=2(dx-dy)^2+2dy^2>0$$

Према томе, функција у тачки $A$ нема локални екстремум, а у тачки $B$ има локални минимум.

**2.** Тачка $(0,0)$ је стационарна тачка, $f(x,0)=-x^3>0$ за $x<0$, $f(0,y)=-y^4<0$, док је $f(0,0)=0$.

*Напомена.* У Хесеовој матриши је $m_1=m_2=0$, па се из ње не може ништа закључити о о постојању локалног екстремума.

**3.**

$$f(x,0)=x^3\begin{cases}>0, & x>0\\<0, & x<0\end{cases},\qquad f(0,0)=0$$

Како је $f(x,0)>f(0,0)$ за $x>0$ и $f(x,0)<f(0,0)$ функција $f$ нема локално екстремум у тачки $(0,0)$.

**4.** $f(0,0)=0,\quad f(x,0)=x^4-x^2<0$ за $|x|<1,\quad f(x,-x)=2x^4>0$

Дакле, не постоји околина тачке $(0,0)$ у којој је испуњен услов за локални екстремум.

**5.** $f(x,0)=2x^2>0=f(0,0)$, што значи да је по $x$ оси локални минимум.

$f(0,y)=y^4>f(0,0)$, па је и по $y$ оси локални минимум.

А по правој $y=kx$? Ако је $f(x,kx)=2x^2-3k^2x^3+k^4x^4=\varphi(x)$, тада је $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$ и $\varphi''(0)=4>0$, па $f$ по свакој правој $y=kx$ има локални минимум у $(0,0)$.

Ипак, због

$$f(2y^2/3,y)=2\cdot\frac{4}{9}y^4-3\cdot\frac{2}{3}y^2\cdot y^2+y^4=-\frac{1}{9}y^4<0=f(0,0)$$

функција $f$ нема локални екстремум у $(0,0)$.

*Напомена.* Из једнакости $f(x,y)=(y^2-x)(y^2-2x)$ се такође види да функција у околини тачке $(0,0)$ има вредности различитог знака. Међутим, из чињенице да је $d^2f(A)=4dx^2$ не може се закључити да је $d^2f(A)>0$ за $|dx|+|dy|\neq 0$. За $dx\neq 0$ то је тачно, али за $dx=0$ и $dy\neq 0$ је $d^2f(A)=0$. Према томе, ради се о случају када је $d^2f(A)\geq 0$ и тада не можемо из овог податка закључити да ли у тачки $A$ постоји локални екстремум.

**6.** Тачка $A(0,0)$ је стационарна тачка, $f(y^2,y)=-y^5\begin{cases}>0, & y<0\\<0, & y>0\end{cases}$, док је $f(0,0)=0$.

Према томе, функција $f$ у тачки $(0,0)$ нема локални екстремум.

Међутим, како је $f(x,0)=x^2$ и $f(0,y)=y^4-y^5$, функција у тачки $(0,0)$ има локални минимум по координатним осама. Такође, у овој тачки је локални минимум и по било којој правој $y=kx$ јер је $f(x,kx)=g(x)$, при чему је $g(0)=g'(0)=0$ и $g''(0)=2$.

**7.** Како је $f(0,0)=0$ и $f(x,x)=x^5>0$ за $x>0$, односно $f(x,x)=x^5<0$ за $x<0$, функција у тачки $(0,0)$ нема локални екстремум.

За $k\neq 1$ је $f(x,kx)=k^5x^5-(k-1)^2x^2=g(x)\sim-(k-1)^2x^2$ када $x\to 0$. Према томе, постоји околина тачке $x=0$ у којој је $f(x,kx)=g(x)<0=f(0,0)$.

**8.** Из система $f'_x=0$, $f'_y=0$ добијамо стационарну тачку $A(1/3,1/3)$. Како је $a=f''_{x^2}=f''_{y^2}=c=-2$ и $b=f''_{xy}=-1$, то је $ac-b^2=3>0$ и $a<0$. Према томе, функција $f$ у тачки $A$ има локални максимум.

**9.** $f'_x=4-2x,\quad f'_y=-4-2y,\quad f''_{x^2}=f''_{y^2}=-2,\quad f''_{xy}=0$

Стационарна тачка је $A(2,-2)$. Како је $d^2f(A)=-2dx^2-2dy^2<0$ за $dx^2+dy^2\neq 0$, функција $f$ у тачки $A$ има локални максимум, $f_{\max}=f(A)=8$.

**10.** Како је

$$f'_x=2x+2a(ax+by+c),\qquad f'_y=2y+2b(ax+by+c),$$

из једнакости $f'_x=0$ и $f'_y=0$ добијамо стационарну тачку $A\left(\dfrac{-ac}{1+a^2+b^2},\dfrac{-bc}{1+a^2+b^2}\right)$.

Парцијални изводи другог реда су

$$f''_{x^2}=2(1+a^2),\qquad f''_{y^2}=2(1+b^2),\qquad f''_{xy}=2ab.$$

У тачки $A$ имамо да је $f''_{x^2}\cdot f''_{y^2}-(f''_{xy})^2=4(1+a^2+b^2)>0$, па је у тој тачки локални минимум, $f_{\min}=f(A)=\dfrac{c^2}{1+a^2+b^2}$.

**11.** Из једнакости $f'_x=0$ и $f'_y=0$, где је

$$f'_x=2x-1+y^2-y,\qquad f'_y=2xy-x,$$

добијамо само једну стационарну тачку $A(5/8,1/2)$.

Како је $f''_{x^2}=2$, $f''_{xy}=2y-1$ и $f''_{y^2}=2x$, у тачки $A$ је $a=2>0$ и $ac-b^2=5/2>0$, што значи да функција $f$ у тачки $A$ има локални минимум који је једнак $-25/64$.

**12.** Из система

$$y(2x+y-1)=0,\qquad x(x+2y-1)=-1$$

добијамо стационарне тачке $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$ и $D(1/3,1/3)$. У тачкама $A$, $B$ и $C$ нема локалног екстремума ($ac-b^2<0$), а у тачки $D$ је локални минимум ($f_{\min}=f(D)=-1/27$).

**13.** Диференцирањем дате функције имамо

$$f'_x=3y-2xy-y^2,\qquad f'_y=3x-x^2-2xy,$$

$$f''_{x^2}=-2y\qquad f''_{xy}=3-2x-2y,\qquad f''_{y^2}=-2x,$$

$$H_f=\begin{bmatrix}-2y & 3-2x-2y\\ 3-2x-2y & -2x\end{bmatrix}.$$

Решавањем система $f'_x=0$, $f'_y=0$ добијамо стационарне тачке $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(0,3)$ и $D(3,0)$.

Како је у тачкама $A$, $C$ и $D$ вредност израза $f''_{x^2}\cdot f''_{y^2}-(f''_{xy})^2$ (главни минор реда два Хесеове матрице $H_f$) негативна, функција $f$ у тим тачкама нема локални екстремум.

У тачки $B$ је $m_2(B)=3>0$ и $m_1(B)=-2<0$, што значи да функција $f$ у тачки $B$ има локални максимум, $f_{\max}=f(B)=1$.

**14.** Из система
$$-2x + y(y-1) = 0, \quad 2xy - x = 0$$
добијамо стационарне тачке $A(0,0)$, $B(0,1)$ и $C(-1/8, 1/2)$. Како је
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 2y-1 \\ 2y-1 & 2x \end{pmatrix},$$
то је $\det H_f(A) = \det H_f(B) = -1$ и $\det H_f(C) = 1/2$. Према томе, у тачкама $A$ и $B$ је седло, а у тачки $C$ локални максимум.

**15.** Парцијалним диференцирањем дате функције добијамо
$$f'_x = 3x^2 - 3y, \quad f'_y = 3y^2 - 3x, \quad f''_{x^2} = 6x, \quad f''_{y^2} = 6y, \quad f''_{xy} = -3,$$
па је
$$H_f = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}.$$
Из система $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ следи $x^2 = y$, $x^4 = y^2 = x$, $x \in \{0,1\}$, па имамо две стационарне тачке $A(0,0)$ и $B(1,1)$.

Функција $f$ у тачки $A$ нема локални екстремум јер је $m_2(A) = -9$, а у тачки $B$ има локални минимум ($f_{\min} = f(B) = -1$) јер је
$$m_2(B) = 27 > 0, \quad f''_{x^2}(B) = 6 > 0.$$

**16.** $f'_x = 3(x^2 - 3y), \quad f'_y = 3(y^2 - 3x), \quad f''_{x^2} = 6x, \quad f''_{y^2} = 6y, \quad f''_{xy} = -9$

Из $f'_x = f'_y = 0$ следи да је $x^4 = 9y^2 = 27x$, односно да је $x(x-3)(x^2+3x+9) = 0$. За $x = 0$ имамо стационарну тачку $A(0,0)$, а за $x = 3$ имамо стационарну тачку $B(3,3)$.

У тачки $A$ није локални екстремум јер је $d^2f(A) = -18dxdy = \begin{cases} -18dx^2, & dy = dx \\ 18dx^2, & dy = -dx. \end{cases}$

У тачки $B$ је локални минимум, $f_{\min} = f(B) = -26$, јер је $H_f(B) = \begin{bmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{bmatrix}$ ($m_1 > 0$, $m_2 > 0$).

**17.** $f'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15, \quad f'_y = 6xy - 12 \quad f''_{x^2} = f''_{y^2} = 6x, \quad f''_{xy} = 6y$

За стационарне тачке имамо
$$xy = 2, \quad x^2 + y^2 = 5; \qquad 2xy = 4, \quad (x+y)^2 = 9; \qquad x + y = \pm 3$$

1. $x + y = 3$, $y = 3 - x$, $x(3-x) = 2$, $x^2 - 3x + 2 = 0$, $(x-2)(x-1) = 0$, $x \in \{1,2\}$
2. $x + y = -3$, $y = -3 - x$, $x(3-x) = -2$, $x^2 + 3x + 2 = 0$, $(x+2)(x+1) = 0$, $x \in \{-1,-2\}$

<u>С.Т.</u> $A(1,2)$, $B(2,1)$, $C(-1,-2)$, $D(-2,-1)$.

У тачкама $A$ и $C$ је $ac - b^2 = 36 - 12 \cdot 12 < 0$, па у њима није ЛЕ.

У тачкама $B$ и $D$ је $ac - b^2 = 12 \cdot 12 - 36 > 0$, па је у њима ЛЕ.

У тачки $B$ је $a = 12 > 0$, па је $f_{\min} = f(B) = -28$, а у тачки $D$ је $a = -12 < 0$, па је $f_{\max} = f(D) = 28$.

**18.** Како је $f'_x = 3x^2 + 6y - 12$ и $f'_y = 3y^2 + 6x - 12$, из једнакости $f'_x = 0$ и $f'_y = 0$ следи да је $(x - y)(x + y - 2) = 0$, односно $y = x$ или $y = 2 - x$. Стационарне тачке су

$$A(-1 + \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5}), \quad B(-1 - \sqrt{5}, -1 - \sqrt{5}), \quad C(2, 0), \quad D(0, 2).$$

Налажењем парцијалних извода другог реда добијамо да је

$$f''_{x^2} = 6x, \quad f''_{xy} = 6, \quad f''_{y^2} = 6y, \quad ac - b^2 = 36(xy - 1).$$

У тачки $A$ функција $f$ има локални минимум, $f_{\min} = 4(7 - 5\sqrt{5})$, јер је $ac - b^2 = 36(5 - 2\sqrt{5}) > 0$ и $a > 0$.

У тачки $B$ функција $f$ има локални максимум, $f_{\max} = 4(7 + 5\sqrt{5})$, јер је $ac - b^2 = 36(5 + 2\sqrt{5}) > 0$ и $a < 0$.

У тачкама $C$ и $D$ функција $f$ нема локални екстремум (седласте тачке) јер је $ac - b^2 = -36 < 0$.

**19.** $f'_x = 3x^2 - 3, \quad f'_y = -6y^2 + 6$

За стационарне тачке $3x^2 - 3 = 0, \; -6y^2 + 6 = 0; \quad x^2 = y^2 = 1$

Стационарне тачке су $A(1, 1), \; B(1, -1), \; C(-1, 1), \; D(-1, -1)$.

Да ли су у њима ЛЕ? $f''_{x^2} = 6x, \; f''_{xy} = 0, \; f''_{y^2} = -12y$

У тачки $A$: $d^2f = 6dx^2 - 12dy^2$ мења знак — нема ЛЕ

У тачки $B$: $d^2f = 6dx^2 + 12dy^2 > 0$ (за $dx^2 + dy^2 \neq 0$) — min

У тачки $C$: $d^2f = -6dx^2 - 12dy^2 < 0$ (за $dx^2 + dy^2 \neq 0$) — max

У тачки $D$: $d^2f = -6dx^2 + 12dy^2$ мења знак — нема ЛЕ

Дакле, $f_{\min} = f(B) = -6, \; f_{\max} = f(C) = 6$

**20.** Из једнакости $f'_x = 0$ и $f'_y = 0$, где је

$$f'_x = 3x^2 - 6y, \quad f'_y = 24y^2 - 6x,$$

добијамо две стационарне тачке: $A(0, 0)$ и $B(1, 1/2)$.

У тачки $A$ је $a = c = 0$ и $b = -6$, па је $ac - b^2 < 0$, што значи да у тој тачки нема локалног екстремума.

У тачки $B$ је $a = 6$ и $ac - b^2 > 0$, па је $f_{\min} = f(B) = 4$.

**21.** Стационарне тачке су

$$A(0, 0), \quad B(-4/3, 0), \quad C(-1, 1), \quad D(-1, -1).$$

Функција $f$ у тачи $A$ има локални минимум ($f_{\min} = 0$), у тачки $B$ има локални максимум ($f_{\max} = 32/27$), а у тачкама $C$ и $D$ нема локални екстремум (седласте тачке).

**22.**

$$f'_x = 6x^2 - 36y, \quad f'_y = 6y^2 - 36x, \quad f''_{x^2} = 12x, \quad f''_{y^2} = 12y, \quad f''_{xy} = -36.$$

стационарне тачке су $A(0, 0)$ и $B(6, 6)$. У тачки $A$ није локални екстремум јер је $ac - b^2 < 0$, а у у тачки $B$ је локални минимум ($f_{\min} = f(B) = -2$) јер је $ac - b^2 = 3888 > 0$.

**23.** Из система
$$2(x-y)+3x^2=0, \quad -2(x-y)+3y^2=0$$
следи да је $x^2+y^2=0$, па имамо само једну стационарну тачку $A(0,0)$ у којој је $ac-b^2=0$. Међутим, из $f(x,x)=2x^3$ следи да функција у тачки $A$ нема локални екстремум јер је $f(x,x)>0$ за $x>0$ и $f(x,x)<0$ за $x<0$.

**24.** Из система
$$x^2+y^2=13, \quad xy=6$$
добијамо четири стационарне тачке: $A(3,2)$, $B(-3,-2)$, $C(2,3)$ и $D(-2,-3)$. У тачки $A$ је строги локални минимум ($f_{\min}=f(A)=-100)$), у тачки $B$ је строги локални максимум ($f_{\max}=f(B)=152$), а у тачкама $C$ и $D$ нема локалних екстремума.

**25.** Стационарне тачке $A(4,2)$ и $B(2,3)$ добијамо из једнакости $f'_x=0$ и $f'_y=0$, где је
$$f'_x=(2x+y-7)(y-2), \quad f'_y=(2y+x-8)(x-1).$$
Како је
$$f''_{x^2}=2y-4, \quad f''_{xy}=2x+2y-9, \quad f''_{y^2}=2x-2,$$
у тачки $A$ је $ac-b^2=-9<0$, а у тачки $B$ је $a>0$ и $ac-b^2=3>0$. Према томе, у тачки $A$ није локални екстремум, а у тачки $B$ је локални минимум.

**26.** Из система
$$2x+2y=0, \quad 2x-3y^2-y^3=0$$
добијамо стационарне тачке $A(0,0)$, $(1,-1)$ и $C(2,-2)$. Како је
$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -6y-3y^2 \end{pmatrix},$$
то је $\det H_f(A)=\det H_f(C)=-4$ и $\det H_f(B)=2$. Према томе, у тачкама $A$ и $C$ је седло, а у тачки $B$ је локални минимум.

**27.** Стационарне тачке су $A(0,0)$, $B(1,1)$ и $C(-1,-1)$. У тачкама $B$ и $C$ је локални минимум, а у тачки $A$ није локални екстремум јер је $f(A)=0$, $f(x,x)=2x^4-4x^2<0$ за $|x|<1$ и $f(x,-x)=2x^4>0$ за $x\neq 0$.

**28.**
$$f'_x=2x-y-1, \quad f'_y=3y^2-x, \quad f''_{x^2}=2, \quad f''_{xy}=-1, \quad f''_{y^2}=6y.$$
Стационарне тачке: $A(1/3,-1/3)$, $B(3/4,1/2)$.
У тачки $A$ је $ac-b^2=-5<0$, па у њој функција $f$ нема локални екстремум.
У тачки $B$ је $ac-b^2=5>0$ и $a>0$, па у њој функција $f$ има локални минимум.

**29.** Парцијалним диференцирањем дате функције добијамо
$$f'_x=y(5-6x^2-y^2), \quad f'_y=x(5-2x^2-3y^2),$$
$$a=f''_{x^2}=-12xy, \quad c=f''_{y^2}=-6xy, \quad b=f''_{xy}=5-6x^2-3y^2.$$
Из система $f'_x=0$ и $f'_y=0$ добијамо девет стационарних тачака.

За $xy = 0$ имамо стационарне тачке

$$A(0,0),\quad B(0,\sqrt{5}),\quad C(0,-\sqrt{5}),\quad D\left(\sqrt{\frac{5}{2}},0\right),\quad E\left(-\sqrt{\frac{5}{2}},0\right).$$

За $xy \neq 0$, решавањем система

$$5-6x^2-y^2=0,\quad 5-2x^2-3y^2=0$$

добијамо стационарне тачке

$$P\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}},\frac{\sqrt{5}}{2}\right),\quad Q\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}},-\frac{\sqrt{5}}{2}\right),\quad R\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}},\frac{\sqrt{5}}{2}\right),\quad S\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}},-\frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

Како је $ac-b^2<0$ у тачкама $A$, $B$, $C$, $D$ и $E$, функција $f$ у тим тачкама нема локалних екстремума.

У осталим стационарним тачкама је $ac-b^2=50>0$, па у њима функција $f$ има локалне екстремуме. У тачкама $P$ и $S$ је $a<0$, а у тачкама $Q$ и $R$ је $a<0$.

Према томе, $f_{\max}=f(P)=f(S)=\dfrac{25}{8\sqrt{2}}$ и $f_{\min}=f(Q)=f(R)=-\dfrac{25}{8\sqrt{2}}$.

**30.** Диференцирањем добијамо да је

$$f'_x=5x^4+9x^2y+3y^3,\quad f'_y=3x^3+9y^2x+5y^4,$$

$$f''_{x^2}=20x^3+18xy,\quad f''_{xy}=9x^2+9y^2,\quad f''_{y^2}=18xy+20y^3.$$

Из једнакости $f'_x=0$ и $f'_y=0$ налазимо да је $y=x$ и $5x^4+12x^3=0$.

Стационарне тачке су $A(0,0)$ и $B(-12/5,-12/5)$. У тачки $A$ није локални екстремум јер је $f(x,0)=x^5>0$ за $x>0$ и $f(x,0)<0$ за $x<0$, а у тачки $B$ је локални максимум јер је у тој тачки $a<0$ и $ac-b^2>0$.

**31.** Парцијални изводи првог и другог реда реда су

$$f'_x=x^3y^2-x^4y^2-x^3y^3,\quad f'_y=2x^3y-2x^4y-3x^3y^2,$$

$$f''_{x^2}=6xy^2-12x^2y^2-6xy^3,\quad f''_{xy}=6x^2y-8x^3y-9x^2y^2,\quad f''_{y^2}=2x^3-2x^4-6x^3y.$$

Из неопходног услова за локални екстремум ($f'_x=0$ и $f'_y=0$) имамо систем

$$x^2y^2(3-4x-3y)=0,\quad yx^3(2-2x-3y)=0.$$

За $xy=0$ решења овог система су $(x,0)$ и $(0,y)$ за $x,y\in\mathbb{R}$, а за $xy\neq 0$ решење $(1/2,1/3)$ добијамо из система $4x+3y=3$ и $2x+3y=2$. Према томе, стационарне тачке функције $f$ су: $A(1/2,1/3)$, $B_x(x,0)$ и $C_y(0,y)$.

У тачки $A$ је

$$a=f''_{x^2}(A)=-1/9<0,\quad b=f''_{xy}(A)=-1/12,\quad c=f''_{y^2}(A)=-1/8,\quad ac-b^2=1/144>0,$$

што значи да функција у тој тачки има локални максимум, $f_{max}=f(A)=\dfrac{1}{432}$.

У тачкама $B_x(x,0)$ је $d^2f(B_x)=2x^3(1-x)dy^2\geq 0$, при чему једнакост важи у случају $dx\neq 0$ и $dy=0$, па се из овог податка не може ништа закључити у вези локалног екстремума. Треба, дакле, размотрити прираштај функције у овим тачкама. Имамо да је

$$\Delta f(B_x) = f(x+\Delta x, \Delta y) - f(x,0) = (x+\Delta x)^3(\Delta y)^2(1-x-\Delta x-\Delta y).$$

За $x \in (0,1)$ је $\Delta f(B_x) \geq 0$ (за довољно мале вредности $\Delta x$ и $\Delta y$), па функција $f$ у овим тачкама има локални минимум који није строги јер је $\Delta f(B_x) = 0$ за $\Delta x \neq 0$ и $\Delta y = 0$. За $x < 0$ или $x > 1$ је $\Delta f(B_x) \leq 0$, па функција $f$ у овим тачкама има локални максимум који такође није строги. За $x = 1$ је $d^2 f(B_1) = 0$, па се из овог податка не може ништа закључити у вези локалног екстремума. Како је

$$f(1+\Delta x, \Delta y) - f(1,0) = -(1+\Delta x)^3(\Delta y)^2(\Delta x+\Delta y),$$

прираштај фунције $f$ у тачки $B_1$ мења знак у зависности од знака за $\Delta y$ (када је $\Delta x = 0$), што значи да у тој тачки није локални екстремум. Остаје још тачка $B_0$ (за $x = 0$) у којој такође није локални екстремум јер је $\Delta f(B_0) = (\Delta x)^3(\Delta y)^2(1-\Delta x-\Delta y)$.

У тачкама $C_y(0,y)$ је $d^2 f(C_y) = 0$, па опет треба разматрати прираштај функције. Како је

$$f(\Delta x, y+\Delta y) = (\Delta x)^3(y+\Delta y)^2(1-\Delta x-y-\Delta y),$$

прираштај мења знак у зависности од знака за $\Delta x$, па функција $f$ у овим тачкама нема локални екстремум.

**32.** Из система $f'_x = 0$ и $f'_y = 0$, где је

$$f'_x = xy^3(12-3x-2y), \qquad f'_y = x^2y^2(18-3x-4y),$$

добијамо стационарне тачке $A(2,3)$, $B_x(x,0)$ за $x \in \mathbb{R}$ и $C_y(0,y)$ за $y \in \mathbb{R}$.

За проверу довољних услова локалног екстремума налазимо парцијалне изводе другог реда,

$$f''_{x^2} = 12y^3 - 6xy^3 02y^4, \quad f''_{xy} = 36xy^2 - 9x^2y^2 - 8xy^3, \quad f''_{y^2} = 36x^2y - 6x^3y - 12x^2y^2.$$

Како је $a = f''_{x^2}(A) = -162$, $b = f''_{xy}(a) = -108$, $c = f''_{y^2}(a) = -144$ и $ac - b^2 > 0$, то у тачки $A$ функција $f$ има локални максимум, при чему је $f_{\max} = 108$.

У тачкама $B_x$ је $d^2 f(B_x) = 0$, па се на основу овога не може закључити да ли у тим тачкама постоји локални екстремум. Због тога ћемо посматрати прираштај функције у тачкама $B_x$,

$$\Delta f(B_x) = (x+\Delta x)^2 \Delta y^2 \Delta y(6-x-\Delta x-\Delta y).$$

За прираштаје $\Delta x$ и $\Delta y$ за које је $x + \Delta x \neq 0$ и $6 - x - \Delta x - \Delta y \neq 0$ знак прираштаја $\Delta f(B_x)$ мења знак у зависности од знака за $\Delta y$. То значи да у тачкама $B_x$ функција $f$ нема локални екстремум.

Прираштај у тачкама $C_y$ је

$$\begin{aligned}\Delta f(C_y) &= \Delta x^2(y+\Delta y)^3(6-\Delta x-y-\Delta y)\\ &= \Delta x^2(y+\Delta y)^2((6-\Delta)(y+\Delta y)-(y+\Delta y)^2).\end{aligned}$$

За $y \in (-\infty,0)$ и $y \in (0,+\infty)$ имамо да је $\Delta f(C_y) \leq 0$, а за $0 < y < 6$ имамо да је $\Delta f(C_y) \geq 0$, при чему се једнакост достиже и у случају $|\Delta x| + \Delta y| \neq 0$ (на пример, за $y + \Delta y = 0$). То значи да функција $f$ у тачкама $C_y$ за $y \in (-\infty,0) \cup (6,+\infty)$ има нестроги максимум, а за $y \in (0,6)$ има нестроги минимум. У тачкама $(0,0)$ и $(0,6)$ функција $f$ нема локални екстремум јер прираштај $\Delta f(C_y)$ за $y = 0$ и за $y = 6$ мења знак зависно од знака заа $\Delta y$.

*Одговор.* $f_{\max} = f(2,3) = 108$, $f_{\max} = f(0,y)$ за $y \in (-\infty,0) \cup (6,+\infty)$ (није строги максимум), $f_{\min} = f(0,y)$ за $y \in (0,6)$ (није строги минимум).

**33.** Парцијалним диференцирањем дате функције добијамо

$$f'_x = 3x^2y^2(12 - x - y) - x^3y^2 = x^2y^2(36 - 4x - 3y),$$

$$f'_y = 2x^4y(12 - x - y) - x^3y^2 = x^3y(24 - 2x - 3y),$$

$$f''_{x^2} = 72xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3 = 6xy^2(12 - 2x - y),$$

$$f''_{y^2} = 24x^3 - 2x^4 - 6x^3y = 2x^3(12 - x - 3y),$$

$$f''_{xy} = 72x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 = x^2y(72 - 8x - 9y).$$

Из услова $f'_x = 0$ и $f'_y = 0$, узимајући у обзир да је $x > 0$ и $y > 0$, добијамо линеарни систем

$$36 - 4x - 3y = 0, \quad 24 - 2x - 3y = 0.$$

Решавањем овог система налазимо само једну стационарну тачку $A(6, 4)$, при чему је

$$H_f(A) = \begin{bmatrix} -6^2 \cdot 4^3 & 12 \cdot 4 \cdot 6^2 \\ 12 \cdot 4 \cdot 6^2 & -2 \cdot 6^4 \end{bmatrix}.$$

Како је

$$m_1 = -6^2 \cdot 4^3 < 0, \quad m_2 = 2 \cdot 4^3 \cdot 6^6 - 12^2 \cdot 4^2 \cdot 6^4 = 4^3 \cdot 6^6 > 0,$$

функција $f$ у тачки $A$ има локални максимум, $f_{\max} = f(A) = 2 \cdot 6^3 \cdot 4^2$.

**34.**

$$f'_x = (2x + 2y^2 + 4y + 1)e^{2x}, \quad f'_y = 2(y + 1)e^{2x},$$

$$f''_{x^2} = 4(x + y^2 + 2y + 1)e^{2x}, \quad f''_{y^2} = 2e^{2x}, \quad f''_{xy} = 4(y + 1)e^{2x}$$

Стационарна тачка је $A(1/2, -1)$. Како је

$$f''_{x^2}(A) = f''_{y^2}(A) = 2e, \quad f''_{xy}(A) = 0, \quad d^2F(A) = 2e(dx^2 + dy^2) > 0 \text{ за } dx^2 + dy^2 > 0,$$

функција $f$ у тачки $A$ има локални минимум.

**35.** Стационарне тачке су $A(1, -1)$ и све тачке праве $x = -1$. У тачки $(-1, 0)$ је седло, у тачкама $(1, -1)$ и $(-1, y)$ за $y > 0$ је минумум, а у тачкама $(-1, y)$ за $y < 0$ је максимум.

**36.** Нека је $g(x, y) = e^{x+y}$ и нека је $a = f''_{x^2}$, $b = f''_{xy}$ и $c = f''_{y^2}$. Диференцирањем функције $f$ по $x$ и $y$ добијамо

$$f'_x = (y^2 - 3x^2 - 6x)g, \quad f'_y = (y^2 - 3x^2 + 2y)g.$$

Из система $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ налазимо да функција $f$ има две стационарне тачке: $A(0, 0)$ и $B(1, -3)$. Треба проверити да ли је у тим тачкама заиста локални екстремум.

Како је

$$f''_{x^2} = (-6x - 6)g + (y^2 - 3x^2 - 6x)g = (y^2 - 3x^2 - 12x - 6)g,$$
$$f''_{xy} = 2yg + (y^2 - 3x^2 - 6x)g = (y^2 - 3x^2 - 6x + 2y)g,$$
$$f''_{y^2} = (2y + 2)g + (y^2 - 3x^2 + 2y)g = (y^2 - 3x^2 + 4y + 2)g,$$

то је

$$f''_{x^2}(A) = -6, \quad f''_{xy}(A) = 0, \quad f''_{y^2}(A) = 2$$

и

$$f''_{x^2}(B) = -12e^{-2}, \quad f''_{xy}(B) = -6e^{-2}, \quad f''_{y^2}(B) = -4e^{-2}.$$

У тачки $A$ је $ac - b^2 = -12$, па у тој тачки функција $f$ нема локални екстремум.

У тачки $B$ је $ac - b^2 = 12e^{-4}$ и $a < 0$, па у тој тачки функција $f$ има локални максимум који је једнак $6e^{-2}$.

**37.** Нека је $g(x,y) = e^{-x+y}$ и нека је $a = f''_{x^2}$, $b = f''_{xy}$ и $c = f''_{y^2}$. Диференцирањем функције $f$ по $x$ и $y$ добијамо

$$f'_x = (4x - 2x^2 - y^2)g, \quad f'_y = (2y + 2x^2 + y^2)g.$$

Из система $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ налазимо да функција $f$ има две стационарне тачке: $A(0,0)$ и $B(2/3, -4/3)$.

Како је

$$\begin{aligned} f''_{x^2} &= (4 - 4x)g + (4x - 2x^2 - y^2)g = (2x^2 + y^2 - 8x + 4)g, \\ f''_{xy} &= -2yg + (4x - 2x^2 - y^2)g = (4x - 2y - 2x^2 - y^2)g, \\ f''_{y^2} &= (2 + 2y)g + (2y + 2x^2 + y^2)g = (2x^2 + y^2 + 4y + 2)g, \end{aligned}$$

то је

$$f''_{x^2}(A) = 4, \quad f''_{xy}(A) = 0, \quad f''_{y^2}(A) = 2$$

и

$$f''_{x^2}(B) = \frac{4}{3}e^{-2}, \quad f''_{xy}(B) = \frac{8}{3}e^{-2}, \quad f''_{y^2}(B) = -\frac{2}{3}e^{-2}.$$

У тачки $B$ је $ac - b^2 = -24e^{-2} < 0$, па у тој тачки функција $f$ нема локални екстремум.

У тачки $A$ је $ac - b^2 = 8 > 0$ и $a = 4 > 0$, па у тој тачки функција $f$ има локални минимум, $f_{\min} = f(A) = 0$.

**38.** За дату функцију је

$$f'_x = (2x + x^2)ye^{x+y}, \quad f'_y = (x^2 + x^2y)e^{x+y},$$

$$f''_{x^2} = y(2 + 4x + x^2)e^{x+y}, \quad f''_{xy} = (2x + x^2)(y + 1)e^{x+y}, \quad f''_{y^2} = x^2(2 + y)e^{x+y}.$$

Из једнакости $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ и услова $x \neq 0$ следи да је $y = -1$ и $x = -2$, па имамо само једну стационарну тачку, $A(-2, -1)$.

Како је $H_f(A) = \begin{bmatrix} -2e^{-3} & 0 \\ 0 & 4e^{-3} \end{bmatrix}$, функција $f$ у тачки $A$ има локални минимум, $f_{\min} = f(A) = -4e^{-3}$.

**39.** Парцијални изводи првог реда функције $f$ су

$$f'_x = (2x - y + x^2 - xy - y^2)e^{x+y} = g(x,y)e^{x+y}, \quad f'_y = (-x - 2y + x^2 - xy - y^2)e^{x+y} = h(x,y)e^{x+y}.$$

Из неопходног услова за локални екстремум ($f'_x = 0$ и $f'_y = 0$) имамо једнакости $g(x,y) = 0$ и $h(x,y) = 0$ из којих следи да је $y = -3x$. Заменом $y$ са $-3x$ у једнакости $g = 0$ добијамо да је $x^2 - x = 0$, што значи да је $x = 0$ или $x = 1$. У првом случају имамо стационарну тачку $A(0,0)$, а у другом случају имамо стационарну тачку $B(1,-3)$.

Парцијални изводи другог реда су

$$f''_{x^2} = (x^2 - xy + 4x - y^2 - 2y + 2)e^{x+y}, \quad f''_{x^2}(A) = 2, \quad f''_{x^2}(B) = \frac{7}{e^2},$$

$$f''_{xy} = (x^2 - xy + x - y^2 - 3y - 1)e^{x+y}, \quad f''_{xy}(A) = -1, \quad f''_{xy}(B) = \frac{4}{e^2},$$

$$f''_{y^2} = (x^2 - xy - 2x - y^2 - 4y - 2)e^{x+y}, \quad f''_{xy}(A) = -2, \quad f''_{xy}(B) = \frac{3}{e^2}.$$

Како је

$$H_f(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}, \quad m_1 = 2 > 0, \quad m_2 = -5 < 0,$$

$$H_f(B) = \begin{vmatrix} 7e^{-2} & 4e^{-2} \\ 4e^{-2} & 3e^{-2} \end{vmatrix}, \quad m_1 = 7e^{-2} > 0, \quad m_2 = 5e^{-4} > 0,$$

у тачки $A$ није локални екстремум, а у тачки $B$ је локални минимум, $f_{\min} = f(B) = -5e^{-2}$.

*Напомена.* Слични задаци су:

$$f(x,y) = (x^2 - xy - y^2)e^{x+2y}, \quad f_{\min} = f(0,-1) = -e^{-2},$$

$$f(x,y) = (x^2 - xy - y^2)e^{2x+3y}, \quad f_{\min} = f(1/11, -8/11) = -\frac{5}{11}e^{-2},$$

$$f(x,y) = (x^2 - xy - y^2)e^{2x-3y}, \quad f_{\max} = f(-7,-4) = 5e^{-2},$$

$$f(x,y) = (x^2 - xy - y^2)e^{2x-y}, \quad f_{\max} = f(-1,0) = e^{-2},$$

$$f(x,y) = (x^2 - xy - y^2)e^{x-3y}, \quad f_{\min} = f(1,1) = -e^{-2},$$

$$f(x,y) = (x^2 + xy - y^2)e^{x+3y}, \quad f_{\min} = f(1,-1) = -e^{-2},$$

$$f(x,y) = (x^2 + xy - y^2)e^{2x+3y}, \quad f_{\min} = f(-7,4) = 5e^{-2},$$

$$f(x,y) = (x^2 + 3xy - y^2)e^{2x+3y}, \quad f_{\max} = f(-1,0) = e^{-2},$$

$$f(x,y) = (x^2 + 3xy - 2y^2)e^{2x+3y}, \quad f_{\max} = f(-1,0) = e^{-2},$$

$$f(x,y) = (x^2 + 3xy - 3y^2)e^{2x+3y}, \quad f_{\max} = f(-1,0) = e^{-2},$$

$$f(x,y) = (x^2 + 3xy - 4y^2)e^{2x+3y}, \quad f_{\max} = f(-1,0) = e^{-2},$$

$$f(x,y) = (x^2 + 3xy - ay^2)e^{2x+3y}, \quad f_{\max} = f(-1,0) = e^{-2}.$$

**40.** Ако је $f(x,y) = (x^2 - 2xy + 2y^2)g(x,y)$, тада је

$$f'_x = (2x - 2y + x^2 - 2xy + 2y^2)g, \quad f'_y = (-2x + 4y - x^2 + 2xy - 2y^2)g.$$

Из $f'_x = f'_y = 0$ следи да је $y = 0$ и $2x + x^2 = 0$. То значи да функција има две стационарне тачке: $A(0,0)$ и $B(-2,0)$.

Довољни услови

$$f''_{x^2}=(x^2-2xy+4x+2y^2-4y+2)g,\ f''_{y^2}=(x^2-2xy+4x+2y^2-8y+4)g,$$

$$f''_{xy}-(x^2-2xy+4x+2y^2-6y+2)g$$

У стационарним тачкама је

$$H_f(A)=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix},\ m_1=2>0,\ m_2=4>0,\quad H_f(B)=\begin{bmatrix}-2/e^2 & 2/e^2\\ 2/e^2 & 0\end{bmatrix},\ m_2<0.$$

Према томе, у тачки $A$ функција има локални минимум (једнак нули), а у тачки $B$ нема локални екстремум.

**41.** За $f(x,y)=(x^2-y^2)g(x,y)$ имамо да је

$$f'_x=(2x+x^2-y^2)g,\quad f'_y=2(x^2-y^2-y)g.$$

Из услова $f'_x=f'_y=0$ следи да је $y=-2x$ и $2x-3x^2=0$. За $x=0$ функција има стационарну тачку $A(0,0)$, а за $x=2/3$ функција има стационарну тачку $B(2.3,-4/3)$.

Довољан услов

$$f''_{x^2}=(2+4x+x^2-y^2)g,\quad f''_{y^2}=2(2x^2-2y^2-4y-1)g,\quad f''_{xy}=2(2x-y+x^2-y^2)g$$

У тачки $A$ је

$$a=f''_{x^2}=2,\quad c=f''_{y^2}=-2,\quad b=f''_{xy}=0,\quad ac-b^2=-4<0,$$

па у овој тачки функција нема локални екстремум.

У тачки $B$ је

$$a=f''_{x^2}=\frac{10}{3e^2},\quad c=f''_{y^2}=\frac{10}{3e^2},\quad b=f''_{xy}=\frac{8}{3e^2},\quad ac-b^2=\frac{4}{e^4}>0,$$

што значи да функција $f$ у тачки $B$ има локални минимум.

**42.** За дату функцију је

$$f'_x=(1-2x^2)e^{-(x^2+y^2)},\ f'_y=-2xye^{-(x^2+y^2)},$$

$$f''_{x^2}=2x(2x^2-3)e^{-(x^2+y^2)},\ f''_{xy}=2y(2x^2-1)e^{-(x^2+y^2)},\quad f''_{y^2}=2x(2y^2-1)e^{-(x^2+y^2)}.$$

Из једнакости $f'_x=0$, $f'_y=0$ следи да је $1-2x^2=0$ и $2xy=0$, па имамо две стационарне тачке: $A(1/\sqrt{2},0)$ и $B(-1/\sqrt{2},0)$.

Хесијани у овим тачкама су

$$H_f(A)=\begin{bmatrix}-2\sqrt{2}/\sqrt{e} & 0\\ 0 & -2\sqrt{2}/\sqrt{e}\end{bmatrix},\quad H_f(B)=\begin{bmatrix}2\sqrt{2}/\sqrt{e} & 0\\ 0 & 2\sqrt{2}/\sqrt{e}\end{bmatrix}.$$

У тачки $A$ је $m_1<0$ и $m_2>0$, где су $m_1$ и $m_2$ главни минори матрице $H_f(A)$, па функција $f$ у тачки $A$ има локални максимум, $f_{\max}=f(A)=1/\sqrt{2e}$.

У тачки $B$ је $m_1>0$ и $m_2>0$, где су $m_1$ и $m_2$ главни минори матрице $H_f(B)$, па функција $f$ у тачки $B$ има локални минимум, $f_{\min}=f(B)=-1/\sqrt{2e}$.

**43.** Ако је $f(x,y) = xyg(x,y)$, тада је $f'_x = (y - yx^2)g$ и $f'_y = (x + xy)g$. Како је $g(x,y) \neq 0$, стационарне тачке $A(0,0)$, $B(1,-1)$ и $C(-1,-1)$ добијамо решавањем система $y(1-x^2) = 0$ и $x(1+y) = 0$. За проверу да ли су у стационарним тачкама локални екстремуми, потребни су парцијални изводи другог реда. Диференцирањем израза за $f'_x$ и $f'_y$ добијамо

$$a = f''_{x^2} = (yx^3 - 3xy)g, \quad b = f''_{xy} = (1+y)(1-x^2)g, \quad c = f''_{y^2} = x(2+y)g.$$

У тачки $A$ је $a = c = 0$, $b = 1$, $ac - b^2 < 0$, па функција $f$ у тој тачки нема локални екстремум.

У тачки $B$ је $a = 2e^{-3/2}$, $b = 0$, $c = e^{-3/2}$, $ac - b^2 = 2e^{-3} > 0$, па је $f_{\min} = f(B) = -e^{-3/2}$.

У тачки $C$ је $a = -2e^{-3/2}$, $b = 0$, $c = -e^{-3/2}$, $ac - b^2 = 2e^{-3} > 0$, па је $f_{\max} = f(C) = e^{-3/2}$.

**44.**

$$f'_x = -2(2x^2 - xy - 5x + 1)e^{x^2-y}, \quad f'_y = (2x - y - 4)e^{x^2-y}.$$

Из $f'_y = 0$ имамо да је $y = 2x - 4$, па заменом у $f'_x = 0$ добијамо да је $x = 1$. Функција има само једну стационарну тачку $A(1,-2)$ и она је седласта јер је $ac - b^2 = -2e^{-6}$.

**45.** Како је

$$f'_x(x,y) = 2xe^{-x^2/4} - \frac{x}{2}(x^2 - y^2)e^{-x^2/4}, \quad f'_y(x,y) = -2ye^{-x^2/4},$$

стационарне тачке су $A(0,0)$, $B(2,0)$ и $C(-2,0)$, при чему је

$$H_f(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad H_f(B) = H_f(C) = \begin{pmatrix} -4e & 0 \\ 0 & -2e \end{pmatrix}.$$

Према томе, у тачки $A$ је седло, а у тачкама $B$ и $C$ су локални максимуми.

**46.** Ако је $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-x^2/2-y^2/2}$, тада је

$$f'_x = (2x + (x^2 - y^2)(-x))g(x,y), \quad f'_y = (2y + (x^2 - y^2)(-y))g(x,y).$$

Из система $f'_x = 0$ и $f'_y = 0$, односно

$$x(2 - x^2 + y^2) = 0, \quad y(2 + x^2 - y^2) = 9$$

добијамо пет стационарних тачака: $A(0,0)$, $B(0,\sqrt{2})$, $C(0,-\sqrt{2})$, $D(\sqrt{2},0)$ и $E(-\sqrt{2},0)$. Из израза за парцијалне изводе другог реда функције $f$

$$\begin{aligned} f''_{x^2} &= (2 - 5x^2 + y^2 + x^4 - x^2y^2)g(x,y), \\ f''_{xy} &= (x^3y - xy^3)g(x,y), \\ f''_{y^2} &= (-2 + 5y^2 - x^2 + x^2y^2 - y^4)g(x,y) \end{aligned}$$

налазимо да је

$$H_f(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad H_f(B) = H_f(C) = e^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$H_f(D) = H_f(E) = e^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Према томе, у тачкама $B$ и $C$ функција $f$ има локални минимум, у тачкама $D$ и $E$ има локални максимум, а у тачки $A$ нема локални екстремум.

**47.**

$$f'_x = 2xe^{-x^2-y^2}(1 - x^2 - 2y^2), \quad f'_y = 2ye^{-x^2-y^2}(2 - x^2 - 2y^2)$$

Стационарне тачке ?

$$x(1 - x^2 - 2y^2) = 0, \quad y(2 - x^2 - 2y^2) = 0$$

1. $x = 0$, $y = 0$ – стационарна тачка је $A(0, 0)$
2. $x = 0$, $2 - x^2 - 2y^2 = 0$ – стационарне тачке су $B(0, 1)$ и $C(0, -1)$
3. $1 - x^2 - 2y^2 = 0$, $y = 0$ – стационарне тачке су $D(1, 0)$ и $E(-1, 0)$

Довољни услови ?

$f(A) = 0$, $f(P) > 0$ за $P \neq A$, што значи да $f$ у $A$ има локални минимум

$B, C, D, E$ ?

$$f''_{x^2} = 2e^{-x^2-y^2}(1 - 5x^2 - 2y^2 + 2x^4 + 4x^2y^2), \quad f''_{xy} = 4xye^{-x^2-y^2}(-3 + x^2 + 2y^2),$$

$$f''_{y^2} = 2e^{-x^2-y^2}(2 - 10y^2 - x^2 + 2x^2y^2 + 4y^4)$$

$B, C$ : $a = f''_{x^2} = -2e^{-1}$, $b = f''_{x^2} = 0$, $c = f''_{y^2} = -8e^{-1}$

$$ac - b^2 = 16e^{-2} > 0, \ a < 0 \Rightarrow f_{\max} = f(B) = f(C) = 2/e$$

$D, E$ : $a = f''_{x^2} = -4e^{-1}$, $b = f''_{x^2} = 0$, $c = f''_{y^2} = 2e^{-1}$

$$ac - b^2 = -8e^{-2} < 0 \Rightarrow f \text{ нема ЛЕ у } D \text{ и } E$$

*Напомена.* Подаци се могу прегледно дати у табели

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a = f''_{x^2}$ | 2 | $-2e^{-1}$ | $-2e^{-1}$ | $-4e^{-1}$ | $-4e^{-1}$ |
| $c = f''_{y^2}$ | 4 | $-8e^{-1}$ | $-8e^{-1}$ | $2e^{-1}$ | $2e^{-1}$ |
| $b = f''_{zy}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $ac - b^2$ | 8 | $16e^{-2}$ | $16e^{-2}$ | $-8e^{-2}$ | $-8e^{-2}$ |
| | min | max | max | седло | седло |

**48.** $f(x, y) = (x - 2y)g(x, y)$, $f'_x = g - 2x(x - 2y)g = (1 - 2x^2 + 4xy)g$, $f'_y = -2(1 + xy - 2y^2)g$

За стационарне тачке треба решити систем

$$1 - 2x^2 + 4xy = 0, \quad 1 + xy - 2y^2 = 0.$$

Из друге једначине имамо да је $xy = 2y^2 - 1$ и $x = 2y - 1/y$. Заменом израза за $xy$ и $x$ у првој једначини добијамо

$$1 - 2(2y - 1/y)^2 + 4(2y^2 - 1) = 0, \quad 1 - 8y^2 + 8 - \frac{2}{y^2} + 8y^2 - 4 = 0, \quad \frac{2}{y^2} = 5, \quad y = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Дакле, функција има две стационарне тачке: $A\left(-\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$ и $B\left(\frac{1}{\sqrt{10}},-\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$.

Довољни услови

$f''_{x^2}=(4x^3-8x^2y-6x+4y)g,\quad f''_{y^2}=-2(4y^2-2xy^2+x-6y)g,\quad f''_{xy}=(4x^2y+4x-8xy^2-2y)g$

У тачки $A$ је

$$a=f''_{x^2}(A)=6\sqrt{\frac{2}{5e}}>0,\quad c=f''_{y^2}(A)=9\sqrt{\frac{2}{5e}},\quad b=f''_{xy}(A)=-2\sqrt{\frac{2}{5e}},\quad ac-b^2=\frac{20}{e}>0,$$

а у тачки $B$ је

$$a=f''_{x^2}(B)=-6\sqrt{\frac{2}{5e}}<0,\quad c=f''_{y^2}(B)=-9\sqrt{\frac{2}{5e}},\quad b=f''_{xy}(B)=2\sqrt{\frac{2}{5e}},\quad ac-b^2=\frac{20}{e}>0.$$

Према томе, $f_{\min}=f(A)=-\sqrt{\frac{5}{2e}}$ и $f_{\max}=f(B)=\sqrt{\frac{5}{2e}}$.

**49.** Нека је $f(x,y)=xyg(x,y)$. Стационарне тачке одређујемо из система једначина

$$f'_x(x,y)=yg(x,y)(1-2x^2)=0,\ f'_y(x,y)=xg(x,y)(1-2y^2)=0.$$

Из прве једначине следи да је $y=0$ или $1=2x^2$, а из друге да је $x=0$ или $1=2y^2$. Стационарне тачке су: $A(0,0)$, $B(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$, $C(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$, $D(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$, $E(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$. Парцијални изводи другог реда су

$$\begin{aligned}f''_{xx}(x,y)&=yg(x,y)(1-2x^2)+yg(x,y)(-4x),\\ f''_{xy}(x,y)&=(1-2x^2)g(x,y)+(1-2x^2)yg((x,y)(-2y),\\ f''_{yy}(x,y)&=xg(x,y)(-2y)(1-2y^2)+xg(x,y)(-4y).\end{aligned}$$

За тачку $A$ је $f''_{xx}=f''_{yy}=0$, $f''_{xy}=1$ па је

$$d^2f(A)=2dxdy\begin{cases}>0, & \text{за } dx=dy\neq 0\\ <0, & \text{за } dx=-dy\neq 0.\end{cases}$$

У тачкама $B,C,D,E$ је $f''_{xx}=-\frac{4}{e}xy$, $f''_{xy}=0$, $f''_{yy}=-\frac{4}{e}xy$, па је

$$d^2f=-\frac{4}{e}xydx^2-\frac{4}{e}xydy^2=-\frac{4}{e}xy(dx^2+dy^2).$$

Према томе, $f_{\max}=f(B)=f(E)$, а $f_{\min}=f(C)=f(D)$.

**50.** Нека је $g(x,y)=e^{-(x^2+y^2)/2}$. Тада је

$$f'_x=(y-x^2y)g,\quad f'_y=(x-xy^2)g.$$

Из система $y(1-x^2)=0$, $x(1-y^2)=0$ добијамо стационарне тачке $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(1,-1)$, $D(-1,1)$ и $E(-1,-1)$. Како је

$$f''_{x^2}=xy(x^2-3)g,\quad f''_{y^2}=xy(y^2-3)g,\quad f''_{xy}=(1-x^2)(1-y^2)g,$$

то је

$$\Delta(x,y)=\det H_f(x,y)=(x^2y^2(x^2-3)(y^2-3)-(1-x^2)(1-y^2))g^2,$$

па је $\Delta(A)<0$, $\Delta(X)>0$ за $X\in\{B,C,D,E\}$. Према томе, у тачки $A$ је седло, у тачкама $B$ и $E$ су локални максимуми ($f''_{x^2}<0$), а тачкама $C$ и $D$ су локални минимуми ($f''_{x^2}>0$).

Подаци су дати у следећој табели.

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a = f''_{x^2}$ | 0 | $-2/e$ | $2/e$ | $2/e$ | $-2/e$ |
| $c = f''_{y^2}$ | 0 | $2/e$ | $2/e$ | $2/e$ | $-2/e$ |
| $b = f''_{zy}$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $ac - b^2$ | -1 | $4/e^2$ | $4/e^2$ | $4/e^2$ | $4/e^2$ |
| | седло | max | min | min | max |

**51.** Ако је $g(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$, тада је

$$\begin{aligned}
f'_x &= 6xg(x,y) + (3x^2+2y^2)g(x,y)\cdot(-2x) = 2x(3-3x^2-2y^2)g(x,y),\\
f'_y &= 4yg(x,y) + (3x^2+2y^2)g(x,y)\cdot(-2y) = 2y(2-3x^2-2y^2)g(x,y),\\
f''_{x^2} &= 2(6x^4-15x^2-2y^2+4x^2y^2+3)g(x,y),\\
f''_{xy} &= 4(3x^3y+2xy^3-5xy)g(x,y),\\
f''_{y^2} &= 2(-3x^2-10y^2+4y^4+6x^2y^2+2).
\end{aligned}$$

За стационарне тачке имамо систем

$$x(3-3x^2-2y^2) = 0, \quad y(2-3x^2-2y^2) = 0.$$

1. Ако је $x = 0$ и $y = 0$, имамо стационарну тачку $A(0,0)$.
2. Ако је $x = 0$ и $3x^2+2y^2 = 2$, имамо две стационарне тачке, $B(0,1)$ и $C(0,-1)$.
3. Ако је $y = 0$ и $3x^2+2y^2 = 3$, имамо такође две стационарне тачке, $D(1,0)$ и $E(-1,0)$.
4. Систем $3x^2+2y^2 = 3$, $3x^2+2y^2 = 2$ нема решења.

У тачки $A$ функција $f$ има локални мминимум, $f_{\min} = f(A) = 0$, јер је $d^2f(A) = 6dx^2 + 4dy^2$.

У тачкама $D$ и $E$ функција $f$ има локални максимум, $f_{\max} = f(D) = f(E) = 3e^{-1}$, јер је $d^2f(B) = d^2f(C) = -12e^{-1}dx^2 - 2e^{-1}dy^2$.

У тачкама $B$ и $C$ функција $f$ нема локални екстремум јер је $ac - b^2 < 0$, где је $a = f''_{x^2}(D) = 2e^{-1}$, $b = f''_{xy}(D) = 0$ и $c = f''_{y^2}(D) = -8e^{-1}$.

**52.** Нека је $f(x,y) = (ax^2+by^2)\,g(x,y)$. Парцијалним диференцирањем функције $f$ налазимо да је

$$f'_x = 2x(a-ax^2-by^2)g(x,y), \quad f'_y = 2y(b-ax^2-by^2).$$

Из система једначина $f'_x = 0$ и $f'_y = 0$ добијамо стационарне тачке $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(0,-1)$, $D(1,0)$ и $E(-1,0)$.

Парцијални изводи другог реда функције $f$ су

$$\begin{aligned}
f''_{xx}(x,y) &= (2a-4ax^2)g(x,y) - 2f(x,y) - 2xf'_x(x,y),\\
f''_{xy}(x,y) &= -4axyg(x,y) - 2xf'_y(x,y),\\
f''_{yy}(x,y) &= (2b-4by^2)g(x,y) - 2f(x,y) - 2yf'_y(x,y).
\end{aligned}$$

Специјално,

$$f''_{x^2}(A) = 2a, \quad f''_{x^2}(B) = f''_{x^2}(C) = 2(a-b)e^1, \quad f''_{x^2}(D) = f''_{x^2}(E) = -4ae^{-1},$$
$$f''_{y^2}(A) = 2b, \quad f''_{y^2}(B) = f''_{y^2}(C) = -4be^{-1}, \quad f''_{y^2}(D) = f''_{y^2}(E) = 2(b-a)e^{-1},$$

док је $f''_{xy} = 0$ у свим стационарним тачкама.

Анализирањем знакова главних минора Хесијана функције $f$ у стационарним тачкама утврђујемо да ли у њима заиста постоји локални екстремум.

1. У тачки $A$ је $f''_{x^2} \cdot f''_{y^2} - {f''_{xy}}^2 = 4ab$, па функција $f$ у тачки $A$ има локални минимум ако је $a > 0$ и $b > 0$, односно локални максимум ако је $a < 0$ и $b < 0$.
2. У тачкама $B$ и $C$ је $f''_{x^2} \cdot f''_{y^2} - {f''_{xy}}^2 = -8b(a-b)e^{-2}$, па функција $f$ у тим тачкама има локални минимум ако је $a > b$ и $b < 0$, а локални максимум ако је $a < b$ и $b > 0$.
3. У тачкама $D$ и $E$ је $f''_{x^2} \cdot f''_{y^2} - {f''_{xy}}^2 = 8a(a-b)e^{-2}$, па функција $f$ у тим тачкама има локални минимум ако је $a < b$ и $a < 0$, односно локални максимум ако је $a > b$ и $a > 0$.

**53.** Парцијалним диференцирањем дате функције добијамо

$$f'_x = (y(x^2 + 2xy + 4y^2) + 2x + 2y)e^{xy}, \quad f'_y = (x(x^2 + 2xy + 4y^2) + 2x + 8y)e^{xy},$$
$$f''_{x^2} = (8 + x(8y + 2x))e^{xy} + xf'_y, \quad f''_{y^2} = (2 + y(2y + 2x)) + yf'_y,$$
$$f''_{xy} = (2 + 4y^2 + 4xy + 3x^2)e^{xy} + yf'_x.$$

Једно решење система

$$2y + 2x + y(4y^2 + 2xy + x^2) = 0, \quad 8y + 2x + x(4y^2 + 2xy + x^2) = 0$$

је $x = 0$, $y = 0$, па је $A(0,0)$ једна стационарна тачка.

Множењем прве једначине са $x$, а друге са $-y$ и сабирањем добијамо да је $x^2 = 4y^2$, односно $x = \pm 2y$.

За $x = 2y$ систем нема решења, а за $x = -2y$ добијамо две стационарне тачке, $B(-\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ и $C(\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

Функција $f$ у тачки $A$ има локални минимум ($f_{\min} = f(A) = 0$) јер је

$$f''_{x^2}(A) \cdot f''_{y^2}(A) - f''_{xy}(A)^2 = 12 > 0,$$

а у тачкама $B$ и $C$ нема локалних екстремума јер је у тим тачкама

$$f''_{x^2} f''_{y^2} - (f''_{xy})^2 = -32/e^2 < 0.$$

**54.** За $(x,y) \neq (0,0)$ је $f'_x = -\dfrac{2x}{3(x^2+y^2)^{2/3}}$, $\quad f'_y = -\dfrac{2y}{3(x^2+y^2)^{2/3}}$. Пошто је

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}},$$

функција $f$ нема парцијални извод $f'_x$ у тачки $(0,0)$.

Према томе, функција нема стационарних тачака, али има критичну тачку $(0,0)$. Како је $f(x,y) < f(0,0)$ за свако $(x,y) \neq (0,0)$, у тачки $(0,0)$ је не само локални, већ и глобални (апсолутни) екстремум функције $f$.

**55.** Из једнакости $f'_x = 0$ и $f'_y = 0$, где је

$$f'_x = \frac{-x^2 + 2y^2 - 2xy + 6}{(x^2 + 2y^2 + 6)^2}, \quad f'_y = \frac{x^2 - 2y^2 - 4xy + 6}{(x^2 + 2y^2 + 6)^2},$$

добијамо две стационарне тачке: $A(2, 1)$ и $B(-2, -1)$.

У обе тачке је $ac - b^2 > 0$, при чему је $a < 0$ у тачки $A$ и $a > 0$ у тачки $B$. Према томе, $f_{\max} = f(A) = 1/4$ и $f_{\min} = f(B) = -1/4$.

**56.** Парцијални изводи првог реда функције $f$ су

$$f'_x = \frac{a(x^2 + y^2 + 1) - x(ax + by + c)}{\sqrt{(x^2 + y^2 + 1)^3}}, \quad f'_y = \frac{b(x^2 + y^2 + 1) - y(ax + by + c)}{\sqrt{(x^2 + y^2 + 1)^3}}.$$

Из неопходних услова локалног екстремума $f'_x = 0$ и $f'_y = 0$ добијамо једнакост

$$(bx - ay)(ax + by + c) = 0$$

(множењем $f'_x = 0$ са $-b\sqrt{(x^2 + y^2 + 1)^3}$ и $f'_y = 0$ са $a\sqrt{(x^2 + y^2 + 1)^3}$ и сабирањем). Из ове једнакости и неопходних услова налазимо стационарну тачку $A(a/c.b/c)$ у случају $c \neq 0$, док за $c = 0$ функција $f$ нема стационарних тачака.

Налажењем парцијалних извода другог реда добијамо да је

$$a = f''_{x^2}(A) = -\frac{b^2 + c^2}{c\sqrt{\left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} + 1\right)^3}},$$

$$c = f''_{y^2}(A) = -\frac{a^2 + c^2}{c\sqrt{\left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} + 1\right)^3}},$$

$$b = f''_{xy}(A) = -\frac{ab}{c\sqrt{\left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} + 1\right)^3}},$$

$$ac - b^2 = \left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} + 1\right)^{-3}\left(\frac{b^2 + c^2}{c} \cdot \frac{a^2 + c^2}{c} - \frac{a^2b^2}{c^2}\right).$$

Како је $ac - b^2 > 0$ и како је $f''_{x^2} < 0$ за $c > 0$ и $f''_{x^2} > 0$ за $c < 0$, функција $f$ има у тачки $A$ локални максимум за $c > 0$, односно локални минимум за $c < 0$. При томе је,

$$f_{\max} = f(A) = \sqrt{a^2 + b^2 + 1}, \quad f_{\min} = f(A) = -\sqrt{a^2 + b^2 + 1}.$$

*Резултат.* За $c > 0$ је $f_{\max} = f(\alpha/\gamma, \beta/\gamma) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$, а за $c < 0$ је $f_{\min} = f(\alpha/\gamma, \beta/\gamma) = -\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$

**57.** Диференцирањем добијамо да је

$$f'_x = \frac{x^2 + y^2 - 3x + 1}{x^2 + y^2 + 1}, \quad f'_y = \frac{x^2 + y^2 - 3y + 1}{x^2 + y^2 + 1},$$

$$f''_{x^2} = 3\frac{x^2 - y^2 - 1}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, \quad f''_{xy} = \frac{6xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, \quad f''_{y^2} = 3\frac{y^2 - x^2 - 1}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

Из једнакости $f'_x = 0$ и $f'_y = 0$ налазимо две стационарне тачке: $A(1, 1)$ и $B(1/2, 1/2)$.

У тачки $A$ је $ac - b^2 < 0$, а у тачки $B$ је $a < 0$ и $ac - b^2 > 0$. Према томе, у тачки $A$ није локални екстремум, а у тачки $B$ је локални максимум који је једнак $1 - \frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}$.

**58.** Из једнакости $f'_x = 0$ и $f'_y = 0$, где је

$$f'_x = 2x - 2y - e^{-x}, \quad f'_y = -2x + 4y,$$

добијамо да је $x - e^{-x} = 0$ и $y = x/2$. Ако је $x_0$ решење једначине $x = e^{-x}$, тада је $A(x_0, x_0/2)$ стационарна тачка функције $f$.

У тачки $A$ имамо да је $a = 2 + e^{-x_0}$, $b = -2$ и $c = 4$, па је $ac - b^2 = 5 + 2e^{-x_0} > 0$. Према томе, функција $f$ у тачки $A$ има локални минимум.

**59.** $f'_x = \cos x - \sin(x + y)$, $\quad f'_y = \cos y - \sin(x + y)$, $\quad f''_{x^2} = -\sin x - \cos(x + y)$,

$$f''_{y^2} = -\sin y - \cos(x + y), \quad f''_{xy} = -\cos(x + y)$$

Из услова $f'_x = f'_y = 0$ следи да је $\cos x = \cos y$. Пошто су $x$ и $y$ из интервала $(0, \pi/4)$, то значи да је $y = x$. Сада из $f'_x = 0$ имамо да је

$$\cos x - \sin 2x = 0, \quad \cos x - 2\sin x \cos x = 0, \quad (1 - 2\sin x)\cos x.$$

За $x \in (0, \pi/4)$ је $\cos x \neq 0$, па је $2\sin x = 1$, односно $x = \pi/6$. Дакле, функција има једну стационарну тачку $A(\pi/6, \pi/6)$.

У тачки $A$ је локални максимум, $f_{max} = f(A) = 3/2$, јер је

$$a = f''_{x^2}(A) = -1 < 0, \quad c = f''_{y^2}(A) = -1, \quad b = f''_{xy}(A) = -\frac{1}{2}, \quad ac - b^2 = \frac{3}{4} > 0.$$

*Напомена.* Ако интервал $(0, \pi/4)$ заменимо интервалом $(0, 3\pi/2)$, добијамо још четири стационарне тачке, при чему је у једној од њих локални минимум, а у остале три није локални екстремум.

**60.**

$$f'_x = 3x - \frac{1}{(x + y)^2}, \quad f'_y = 2y - \frac{1}{(x + y)^2}$$

Из система $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ следи $2x = 2y = \dfrac{1}{(x + y)^2} = \dfrac{1}{4x^2}$. Стационарна тачка је $A(1/2, 1/2)$.

$$f''_{x^2} = 2 + \frac{2}{(x + y)^3}, \quad f''_{xy} = \frac{2}{(x + y)^3}, \quad f''_{y^2} = 2 + \frac{2}{(x + y)^3}.$$

У тачки $A$ је

$$ac - b^2 = 4 + \frac{4}{(x + y)^6} + \frac{8}{(x + y)^6} - \frac{4}{(x + y)^6} = 4 + \frac{8}{(x + y)^6} > 0,$$

па је $f_{\min} = f(A)$.

**61.** Диферницирањем добијамо да је

$$f'_x = \frac{-x^2 + y^2 - 2xy + 2x}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f'_y = \frac{x^2 - y^2 - 2xy + 2y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Из једнакости $f'_x = 0$ и $f'_y = 0$, узимајући у обзир да је $(x, y) \neq (0, 0)$, добијамо само једну стационарну тачку, $A(1, 1)$.

Из израза за парцијалне изводе другог реда

$$f''_{x^2} = \frac{2x^3 - 2y^3 - 6xy^2 + 6x^2y - 6x^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^3}, \quad f''_{xy} = \frac{-2x^3 - 2y^3 + 6xy^2 + 6x^2y - 8xy}{(x^2 + y^2)^3}$$

($f''_{y^2}$ је као $f''_{x^2}$ са замењеним улогама $x$ и $y$) налазимо да у тачки $A$ важи $a = c = -1/2$ и $b = 0$, па је $ac - b^2 = 1/4 > 0$. Према томе, $f_{\max} = f(A) = 1/2$.

**62.** $f'_x = \frac{1}{y} - \frac{1}{x^2}, \quad f'_y = -\frac{x}{y^2} + 1, \quad f''_{x^2} = \frac{2}{x^3}, \quad f''_{y^2} = \frac{2x}{y^3}, \quad f''_{xy} = -\frac{1}{y^2}$

С.Т. $f'_x = f'_y = 0, \quad x^2 = y,\ x = y^2, \quad x = y^2 = x^4, \quad x^4 - x = 0, \quad x(x-1)(x^2+x+1) = 0$

Како је $x \neq 0$, стационарне тачке су $A(1,1)$ и $B(1,-1)$.

$$H_f(A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},\ f_{\min} = f(A) = 3,$$

$$H_f(B) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},\ m_2 = -5 < 0 \text{ нема екстремума}$$

**63.** $f'_x = y - \frac{50}{x^2}, \quad f'_y = x - \frac{20}{y^2}, \quad f''_{x^2} = \frac{100}{x^3}, \quad f''_{y^2} = \frac{40}{y^3}, \quad f''_{xy} = 1$

За С.Т. $yx^2 = 50,\ xy^2 = 20, \quad \frac{50}{x} = \frac{20}{y}, \quad y = \frac{2}{5}x, \quad x^3 = 125, \quad x = 5$

Једина стационарна тачка је $A(5,2)$.

$$H_f(A) = \begin{bmatrix} 4/5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix},\ m_1 = \frac{4}{5} > 0,\ m_2 = 3 > 0,\ f_{\min} = f(A) = 30.$$

**64.** $f'_x = 2x + y - \frac{a^3}{x^2}, \quad f'_y = 2y + x - \frac{a^3}{y^2}, \quad$ За С.Т. $\left.\begin{aligned} 2x + y &= \frac{a^3}{x^2} \\ 2y + x &= \frac{a^3}{y^2} \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} 2x^3 + yx^2 &= a^3 \\ 2y^3 + xy^2 &= a^3 \end{aligned}\right\}$

Лако се проверава да $A(a/\sqrt[3]{3}, a/\sqrt[3]{3})$ јесте стационарна тачка.

Треба још утврдити да је $d^2f(A) > 0$ за $dx^2 + dy^2 \neq 0$. Из $f''_{x^2} = 2 + \frac{2a^3}{x^3}$, $f''_{y^2} = 2 + \frac{2a^3}{y^3}$ и $f''_{xy} = 1$ имамо да је

$$f''_{x^2} = f''_{y^2} = 8, \quad d^2f(A) = 8dx^2 + 8dy^2 + 2dxdy = 7dx^2 + 7dy^2 + (dx+dy)^2 > 0.$$

Наравно, тражени закључак следи и из Хесеове матрице $H_f(A) = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$.

*Напомена.* Тачка $A$ је једина стационарна тачка. Из услова $f'_x = f'_y = 0$ следи

$$2x^3 + yx^2 = 2y^3 + xy^2, \quad 2x^3 - 2y^3 = xy^2 - yx^2, \quad 2(x-y)(x^2+xy+y^2) = xy(y-x).$$

Ако је $y = x$, онда је $3x - a^3/x^2$, па је $x = a/\sqrt[3]{3}$. У случају $x \neq y$ једначина $2(x^2 + xy + y^2) = xy$ нема решења.

**65.** $f'_x = \sqrt{1+y} + \frac{y}{2\sqrt{1+x}}, \quad f'_y = \frac{x}{2\sqrt{1+y}} + \sqrt{1+x}$

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 0 \\ f'_y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2\sqrt{1+y}\sqrt{1+x} + y &= 0 \\ 2\sqrt{1+y}\sqrt{1+x} + x &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = x$$

Функција има само једну стационарну тачку $A(-2/3, -2/3)$. Да ли је у овој тачки локални екстремум?

$$f''_{x^2} = -\frac{y}{4(x+1)^{3/2}}, \quad f''_{y^2} = -\frac{x}{4(y+1)^{3/2}}, \quad f''_{xy} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{y+1}}$$

У тачки $A$ је

$$a = f''_{x^2}(A) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad c = f''_{y^2}(A) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad b = f''_{xy}(A) = \sqrt{3}, \quad ac - b^2 = \frac{3}{4} - 3 < 0.$$

Према томе, функција $f$ у тачки $A$ нема локални екстремум.

**66.** $f_{\min} = f(1,-2) = f(-1,2) = -4$, $f_{\max} = f(1,2) = f(-1,=2) = 4$. За $xy > 0$ функција има и локални минимум (једнак 0 и није строги) у тачкама елипсе $x^2/3 + y^2/12 = 1$, а за $xy < 0$ у тачкама ове елипсе има локални максимум.

**67.**

$$f'_x = 1 - \frac{xy}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, \quad f'_y = \sqrt{9 - x^2 - y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}.$$

Из једначине $f'_x = 0$ следи да је $\sqrt{9 - x^2 - y^2} = xy$. Ако у једначини $f'_y = 0$ заменимо $\sqrt{9 - x^2 - y^2}$ са $xy$ добијамо $y(x - 1/x) = 0$, што значи да је $x = 1$ или $x = -1$. Стационарне тачке $A(1,2)$ и $B(-1,-2)$ припадају области дефинисаности функције $f$.

$$f''_{x^2} = \frac{y^2 - 9y}{\sqrt{(9 - x^2 - y^2)^3}}, \quad f''_{xy} = \frac{x^3 - 9x}{\sqrt{(9 - x^2 - y^2)^3}}, \quad f''_{y^2} = \frac{2y^3 + 3x^2y - 27y}{\sqrt{(9 - x^2 - y^2)^3}}.$$

У тачки $A$ је $a = -5/4$, $b = -1$, $c = -4$, $ac - b^2 = 4 > 0$, па функција $f$ у тој тачки има локални максимум једнак 5.
У тачки $B$ је $a = 5/4$, $b = 1$, $c = 4$, $ac - b^2 = 4 > 0$, па функција $f$ у тој тачки има локални минимум једнак $-5$.

**68.** Функција је дефинисана за $y \geq 0$. За $y > 0$ је

$$f'_x = 6x - 2\sqrt{y} - 4, \quad f'_y = -\frac{x}{\sqrt{y}} + 1,$$

$$f''_{x^2} = 6, \quad f''_{xy} = -\frac{1}{\sqrt{y}}, \quad f''_{y^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{y\sqrt{y}}.$$

Из једнакости $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ добијамо само једну стационарну тачку $A(1,1)$. Како је $f''_{x^2}(A) = 6$, $f''_{xy}(A) = -1$, $f''_{y^2}(A) = \dfrac{1}{2}$, то је

$$d^2f(A) = 6dx^2 - 2dxdy + \frac{1}{2}dy^2 = \frac{1}{2}(2dx - dy)^2 + 4dx^2 > 0$$

за $dx^2 + dy^2 \neq 0$. Према томе, функција $f$ у тачки $A$ има локални минимум, при чему је $f_{\min} = f(A) = 2$.

*Напомена.* Може се поставити и питање да ли за $y = 0$ функција $f$ има неки локални екстремум на скупу $D_f = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$. Ако је $f(x,0) = 3x^2 - 4x + 4 = g(x)$, функција $g$ има локални минимум, $g_{\min} = g(2/3) = 8/3$. Како је

$$f\left(\frac{2}{3}, y\right) = \frac{8}{3} + y - \frac{4}{3}\sqrt{y} < \frac{8}{3}$$

за $y > 0$, функција $f$ у тачки $(2/3, 0)$ нема локални екстремум на скупу $D_f$.

**69.** За $xy > 0$ парцијалним диференцирањем добијамо

$$f'_x = 2x - 2 - 2\sqrt{\frac{y}{x}}, \quad f'_y = 2y - 2 - 2\sqrt{\frac{x}{y}},$$

$$f''_{x^2} = 2 + \frac{1}{x}\sqrt{\frac{y}{x}}, \quad f''_{y^2} = 2 + \frac{1}{y}\sqrt{\frac{x}{y}}, \quad f''_{xy} = -\frac{1}{\sqrt{xy}}.$$

Из једнакости $f'_x = 0$ и $f'_y = 0$ следи да је $(x-y)(1+1/\sqrt{xy}) = 0$, односно $x = y$, па имамо само једну стационарну тачку, $A(2,2)$.

Како је

$$a = f''_{x^2}(A) = \frac{5}{2}, \; b = f''_{xy}(A) = -\frac{1}{2}, \; c = f''_{y^2}(A) = \frac{5}{2}, \quad a > 0, \; ac - b^2 = 6 > 0,$$

функција $f$ у тачки $A$ има локални минимум, $f_{\min} = f(A) = 0$.

**70.** Пошто је

$$f'_x = 2(x-1), \quad f'_y = \frac{y-1}{2-y}, \quad f''_{x^2} = 2, \quad f''_{xy} = 0, \quad f''_{y^2} = \frac{1}{(2-y)^2},$$

јединa стационарна тачка је $A(1,1)$, при чему је $a > 0$ и $ac - b^2 > 0$.

Према томе, функција $f$ у тачки $A$ има локални минимум.

**71.** Функција је дефинисана за $x > 0$ и $y > 0$. Парцијалним диференцирањем налазимо да је

$$f'_x = 2x - \frac{2}{x}, \; f'_y = 2y - \frac{18}{y}, \; f''_{x^2} = 2 + \frac{2}{x^2}, \; f''_{xy} = 0, \; f''_{y^2} = 2 + \frac{18}{y^2}.$$

Из једнакости $f'_x = 0$ и $f'_y = 0$ добијамо само једну стационарну тачку $A(1,3)$.

Како је

$$d^2f(x,y) = \left(2 + \frac{2}{x^2}\right)dx^2 + \left(2 + \frac{18}{y^2}\right)dy^2 > 0$$

за $|dx| + |dy| \neq 0$, функција $f$ у тачки $A$ има локални минимум, $f_{\min} = f(A) = 10 - 18\ln 3$.

**72.** Диференцирањем добијамо да је

$$f'_x = \frac{36 - 4x - 3y}{12x - x^2 - xy}, \quad f'_y = \frac{24 - 3y - 2x}{12y - xy - y^2}.$$

Из једнакости $4x + 3y = 36$ и $2x + 3y = 24$ налазимо стационарну тачку $A(6,4)$.

Како је у тој тачки $f''_{x^2} = -1/3$, $f''_{xy} = -1/4$ и $f''_{y^2} = -55$, то је $a < 0$ и $ac - b^2 > 0$. Према томе, функција $f$ у тачки $A$ има локални максимум, $f_{\max} = f(A) = 5\ln 2$.

**73.** Функција је дефинисана за $xy > 0$. Диференцирањем добијамо да је

$$f'_x = \frac{x-1}{x^2}, \quad f'_y = \frac{y^2-2}{y^3}, \quad f''_{x^2} = \frac{2-x}{x^3}, \quad f''_{xy} = 0, \quad f''_{y^2} = \frac{6-y^2}{y^4}.$$

Из једнакости $f'_x = 0$ и $f'_y = 0$ и услова $xy > 0$ налазима само једну стационарну тачку $A(1, \sqrt{2})$. Како је у тој тачки $a = c = 1$ и $b = 0$, то је $ac - b^2 > 0$. Према томе, $f_{\min} = f(A) = (3 + \ln 2)/2$.

**74.** Из једнакости $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, где је

$$f'_x(x,y) = y\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2}, \quad f'_y(x,y) = x\ln(x^2+y^2) + \frac{2xy^2}{x^2+y^2},$$

добијамо систем

$$y\ln(x^2+y^2) = -\frac{2x^2y}{x^2+y^2}, \quad x\ln(x^2+y^2) = -\frac{2xy^2}{x^2+y^2}.$$

Ако је $y=0$, онда из друге једначине система следи да је $x=0$ или $\ln x^2 = 0$. Како за $(0,0)$ функција није дефинисана, остаје $x^2=1$, па имамо две стационарне тачке $A(0,1)$ и $B(0,-1)$. Слично добијамо и стационарне тачке $C(1,0)$ и $D(-1,0)$.

Ако је $xy \neq 0$, онда из система добијамо $x^2 = y^2$, односно $|x| = |y|$. За $y = x$ имамо стационарне тачке $E(1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e})$ и $F(-1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e})$, а за $y=-x$ имамо стационарне тачке $G(1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e})$ и $H(-1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e})$.

За тачке $A$, $B$, $C$ и $D$ можемо на основу дефиниције локалног екстремума да закључимо да нема екстремума. На пример, из $f(x,1) = x\ln(x^2+1)$ следи да је $f(x,1) > 0$ за $x>0$ и $f(x,1) < 0$ за $x<0$, док је $f(0,1)=0$. За остале тачке одредићемо други диференцијал. Како је

$$f''_{x^2} = \frac{2x^3y + 6xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad f''_{y^2} = \frac{2y^3x + 6yx^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad f''_{xy} = \ln(x^2+y^2) + 2\frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^2},$$

то је

$$f''_{x^2}(x,x) = f''_{y^2}(x,x) = 2, \quad f''_{x^2}(x,-x) = f''_{y^2}(x,-x) = -2$$

и

$$f''_{xy}(x,x) = f''_{xy}(x,-x) = 0,$$

па је

$$d^2f(E) = d^2f(F) = 2(dx^2+dy^2), \quad d^2f(G) = d^2f(H) = -2(dx^2+dy^2).$$

Према томе, $f_{\min} = f(E) = f(F) = -\dfrac{1}{2e}$ и $f_{\max} = f(G) = f(H) = \dfrac{1}{2e}$.

**75.** Диференцирањем функције $f$ по $x$ и $y$ добијамо

$$f'_x = \ln(9x^2+y^2) + \frac{18x^2}{9x^2+y^2} - 2, \quad f'_y = \frac{2xy}{9x^2+y^2}.$$

Из система $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, уз услов $x \neq 0$, налазимо да функција $f$ има две стационарне тачке: $A(1/3, 0)$ и $B(-1/3, 0)$. Треба проверити да ли је у тим тачкама заиста локални екстремум.

Како је

$$\begin{aligned}
f''_{x^2} &= \frac{54x}{9x^2+y^2} - \frac{324x^3}{(9x^2+y^2)^2} = 54x\frac{3x^2+y^2}{(9x62+y^2)^2},\\
f''_{xy} &= \frac{2y}{9x^2+y^2} - \frac{36x^2y}{(9x^2+y^2)^2} = -2y\frac{9x^2-y^2}{(9x^2+y^2)^2},\\
f''_{y^2} &= \frac{2x}{9x^2+y^2} - \frac{4xy^2}{(9x^2+y^2)^2} = 2x\frac{9x^2-y^2}{(9x^2+y^2)^2},
\end{aligned}$$

то је

$$f''_{x^2}(x,0) = \frac{2}{x}, \quad f''_{xy}(x,0) = 0, \quad f''_{y^2}(x,0) = \frac{2}{9x}.$$

За $x = 1/3$ добијамо да је $f''_{x^2}(A) = 6$ и $f''_{y^2}(A) = 2/3$, а за $x = -1/3$ је $f''_{x^2}(A) = -6$ и $f''_{y^2}(A) = -2/3$.

Према томе, $d^2f(A) > 0$ и $d^2f(B) < 0$ за $dx^2 + dy^2 > 0$, па функција $f$ у тачки $A$ има локлани минимум (једнак $-2/3$), а у тачки $B$ функција има локални максимум (једнак $2/3$).

**76.** Како је

$$f'_x(x,y) = \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}, \quad f'_y(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2},$$

то су $A(0,1)$, $B(0,-1)$, $C(1/e,0)$ и $D(-1/e,0)$ стационарне тачке функције $f$.

Пошто је $f(A) = f(B) = 0$, а

$$f(x,1) = f(x,-1) \begin{cases} > 0, & x > 0 \\ < 0, & x < 0, \end{cases}$$

то у тачкама $A$ и $B$ функција $f$ нема локалних екстремума.

Из $f''_{x^2}(x,0) = 2/x$, $f''_{y^2}(x,0) = 2/x$ и $f''_{xy}(x,0) = 0$ добијамо да је

$$d^2f(C) = 2e(dx^2+dy^2), \qquad d^2f(D) = -2(dx^2+dy^2),$$

па је $f_{\min} = f(C) = -2/e$ и $f_{\max} = f(D) = 2/e$.

**77.** Из једнакости $f'_x = 0$ и $f'_y = 0$, где је

$$f'_x - \frac{8xy}{4x^2+y^2}, \quad f'_y = \ln(4x^2+y^2) + \frac{2y^2}{4x^2+y^2}$$

добијамо четири стационарне тачке: $A(0,1/e)$ и $B(0,-1/e)$ (за $x = 0$) и $C(1/2,0)$ и $D(-1/2,0)$ (за $y = 0$).

Како је

$$f''_{x^2} = \frac{8y^3 - 32x^2y}{(4x^2+y^2)^2}, \quad f''_{xy} = \frac{32x^3 - 8xy^2}{(4x^2+y^2)^2}, \quad f''_{y^2} = \frac{2y}{4x^2+y^2} + 16x^2y + 4y^3 - 4y^3 \ (4x^2+y^2)^2,$$

то је

$$f''_{x^2}(A) = 8e, \quad f''_{x^2}(B) = -8e, \quad f''_{x^2}(C) = f''_{x^2}(D) = 0,$$
$$f''_{xy}(A) = f''_{xy}(B) = 0, \quad f''_{xy}(C) = 4, \quad f''_{xy}(D) = -4,$$
$$f''_{y^2}(A) = 2e, \quad f''_{y^2}(B) = -2e, \quad f''_{y^2}(C) = f''_{y^2}(D) = 0.$$

На основу ових података једноставно утврђујемо природу стационарних тачака.

У тачки $A$ је локални минимум, $f_{\min} = f(A) = -2/e$ јер је $a = 8e > 0$ и $ac - b^2 = 16e^2 > 0$.

У тачки $B$ је локални максимум, $f_{\max} = f(B) = 2/e$ јер је $a = -8e < 0$ и $ac - b^2 = 16e^2 > 0$.

У тачкама $C$ и $D$ нема локалних екстремума јер је $ac - b^2 = -16 < 0$.

**78.**
$$f'_x = 2 + \frac{2-2x}{2x-x^2-y^2}, \quad f'_y = -2 - \frac{2y}{2x-x^2-y^2}.$$
Из система $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ добијамо тачке $A(3/2, -1/2)$ и $B(0,1)$, при чему тачка $B$ не припада области дефинисаности функције $f$.
$$f''_{x^2} = 2 \cdot \frac{-x^2+y^2+2x-2}{(2x-x^2-y^2)^2}, \quad f''_{xy} = \frac{4y(1-x)}{(2x-x^2-y^2)^2}, \quad f''_{y^2} = -2 \cdot \frac{y^2-x^2+2x}{(2x-x^2-y^2)^2}.$$
У тачки $A$ је $a=-8$, $b=4$, $c=-8$, $ac-b^2=48$, функција $f$ у тој тачки има локални максимум једнак $4-\ln 2$.

**79.**
$$f'_x = -2 - \frac{2+2x}{-2x-x^2-y^2}, \quad f'_y = -2 - \frac{2y}{-2x-x^2-y^2}.$$
Из система $f'_x = 0$, $f'_y = -$ добија се да је $y = x+1$, односно да је $x=0$ или $x=-3/2$. Тачка $A(-3/2,-1/2)$ припада, а тачка $B(0,1)$ не припада области дефинисаности функције $f$.
$$f''_{x^2} = 2 \cdot \frac{-x^2+y^2-2x-2}{(2x+x^2+y^2)^2}, \quad f''_{xy} = -\frac{4y(1+x)}{(2x+x^2+y^2)^2}, \quad f''_{y^2} = 2 \cdot \frac{2x+x^2-y^2}{(2x+x^2+y^2)^2}.$$
У тачки $A$ је $a=-8$, $b=-4$, $c=-8$, $ac-b^2=48>0$, па је $f_{\max} = f(A) = 4-\ln 2$.

**80.** Ако је $g(x,y) = (x+y)(3x^2+3y^2-2)$, тада је
$$f'_x = \frac{9x^2+6xy+3y^2-2}{g(x,y)}, \quad f'_y = \frac{3x^2+6xy+9y^2-2}{g(x,y)}.$$
Из неопходног услова за локални екстремум ($f'_x=0$ и $f'_y=0$) имамо једнакости
$$9x^2+6xy+3y^2=2, \quad 9y^2+6xy+3x^2=2$$
из којих следи да је $x^2=y^2$, односно да је $y=x$ или $y=-x$. Ǯа $y=x$ из једнакости $9x^2+6xy+3y^2=2$ следи да је $x^2=1/9$, па је $x=1/3$ или $x=-1/3$. Тачка $A(1/3,1/3)$ не припада области дефинисаности функције $f$ ($g(A)=-8/9$), а тачка $B(-1/3,-1/3)$ је стационарна тачка за функцију $f$ ($g(B)=8/9$).

За $y=-x$ је $g(x,-x)=0$, па такве тачке не припадају области дефинисанисти дате функције $f$.

Према томе, остаје само једна стационарна тачка (то је тачка $B$) у којој треба проверити довољан услов за локални екстремум. Парцијални изводи другог реда су
$$f''_{x^2} = -\frac{1}{(x+y)^2} - 6 \cdot \frac{3x^2-3y^2+2}{(3x^2+3y^2-2)^2}, \quad f''_{x^2}(B) = -9,$$
$$f''_{xy} = -\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{36xy}{(3x^2+3y^2-2)^2}, \quad f''_{xy}(B) = -9/2,$$
$$f''_{y^2} = -\frac{1}{(x+y)^2} - 6 \cdot \frac{3y^2-3x^2+2}{(3x^2+3y^2-2)^2}, \quad f''_{y^2}(B) = -9.$$
Дакле, у стационарној тачки $B(-1/3,-1/3)$ је $a=-9$, $b=-9/2$, $c=-9$, $ac-b^2>0$, па је $f_{\max} = f(B) = \ln\frac{8}{9}$.

**81.** Из једнакости $f'_x = 0$ и $f'_y = 0$, где је $f'_x = \ln x + y^2 + 2x + 1$ и $f'_y = 2xy$ следи да је $y = 0$ и $\ln x + 2x + 1 = 0$.

Ако је $x_0$ решење једначине $\ln x = -2x - 1$, тада је $A(x_0, 0)$ стационарна тачка функције $f$.

Како је $f''_{x^2} = 2 + 1/x$, $f''_{xy} = 2y$ и $f''_{y^2} = 2x$, у тачки $A$ имамо да је $a > 0$ и $ac - b^2 = 2x_0 + 1 > 0$. Према томе, функција $f$ у тачки $A$ има локални минимум.

**82.** Тачка $A(0,0)$ је стационарна тачка, $f(0,0) = 0$, $\quad f(x,0) = x^2 > 0$, $\quad f(0,y) = -y^2 < 0$
Из $d^2f(A) = 2dx^2 - 2dxdy - 2dy^2 \begin{cases} > 0, & dx \neq 0,\ dy = 0 \\ < 0, & dx = 0,\ dy \neq 0 \end{cases}$ такође следи да у тачки $A$ није локални екстремум.

**83.** $f'_x = 3x^2 - 4xy^2$, $\quad f'_y = -4x^2y + 4y^3$, $\quad f''_{x^2} = 6x - 4y^2$, $\quad f''_{y^2} = -4x^2 + 12y^2$, $\quad f''_{xy} = -8xy$

Из $f'_y = 0$ следи да је $y(y-x)(y+x) = 0$. За $y = 0$ имамо стационарну тачку $A(0,0)$, за $y = x$ добијамо стационарну тачку $B(3/4, 3/4)$, а за $y = -x$ добијамо стационарну тачку $C(3/4, -3/4)$.

У тачки $A$ нема локалног екстремума јер је $f(A) = 0$, а $f(x,0) = x^3 < f(A)$ за $x < 0$ и $f(x,0) > f(A)$ за $x > 0$.

У тачки $B$ није локални екстремум јер је

$$a = f''_{x^2}(A) = \frac{9}{4}, \quad c = f''_{y^2}(A) = \frac{9}{2}, \quad b = f''_{xy}(A) = -\frac{9}{2}, \quad ac - b^2 = \frac{81}{8} - \frac{81}{4} = -\frac{81}{8} < 0.$$

Слично важи и у тачки $C$ за коју је $a = 9/4$ и $b = c = 9/2$.

**84.** $f'_x = y - \dfrac{1}{2(x+y)^2}$, $\quad f'_y = x - \dfrac{1}{2(x+y)^2}$, $\quad f''_{x^2} = f''_{y^2} = \dfrac{1}{(x+y)^3}$, $\quad f''_{xy} = 1 + \dfrac{1}{(x+y)^3}$

$$f'_x = 0,\ f'_y = 0 \Rightarrow y = x,\ x^3 = \frac{1}{8},\ x = \frac{1}{2}$$

С.Т. $A\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $\quad f''_{x^2}(A) = f''_{y^2}(A) = 1$, $f''_{xy}(A) = 2$, $\quad H_f(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $m_1 = 1 > 0$, $m_2 = -3 < 0$

Како је $m_2 < 0$, функција у тачи $A$ нема локални екстремум. Наравно, закључак следи и из израза за диференцијал другог реда у тачки $A$,

$$d^2f(A) = dx^2 + 4dxdy + dy^2 = (dx+dy)^2 + 2dxdy = \begin{cases} -2dx^2 < 0, & dy = -dx \\ 6dx^2 > 0, & dy = dx \end{cases}$$

**85.** Како је

$$f'_x = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}, \quad f'_y = -\frac{2}{y^3} + \frac{1}{y}, \quad f''_{x^2} = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2}, \quad f''_{xy} = 0, \quad f''_{y^2} = \frac{6}{y^4} - \frac{1}{y^2},$$

добијамо само једну стационарну тачку $A(-1, -\sqrt{2})$, при чему је $ac - b^2 < 0$.

Према томе, функције $f$ у тачки $A$ нема локални екстремум.

**86.** $f'_x = 2xy\ln x + xy$, $\quad f'_y = 2x\ln x$

Пошто је $x > 0$, из услова $f'_x = 0$ следи да је $x = 1$, па функција има само једну стационарну тачку $A(1, 0)$.

Да ли је у тој тачки локални екстремум? Вредност функције у тачки $A$ је нула, а у тачки $(1+x, y)$ је
$$f(1+x, y) = (1+x)^2 y \ln(1+x),$$
па функција мења знак зависно од прираштаја $x$ и $y$ (знак је $+$ ако су $x$ и $y$ позитивни, а $-$ ако је $x$ позитивно и $y$ негативно). Према томе, у тачки $A$ функција нема локални екстремум.

*Напомена.* На основу знака за $d^2f(A)$ се такође може видети да у тачки $A$ није локални екстремум. Најпре налазимо да је
$$f''_{x^2} = 2y\ln x + 2y, \quad f''_{y^2} = 0 \quad f''_{xy} = 2x\ln x + x, \quad f''_{x^2}(A) = f''_{y^2}(A) = 0, \ f''_{xy}(A) = 1,$$
а затим из једнакости $d^2f(A) = 2dxdy$ видимо да $d^2f(A)$ мења знак у зависности од $dx$ и $dy$.

**87.** Из једнакости $f'_x = 0$ и $f'_y = 0$, где је $f'_x = e^y + y/x$ и $f'_y = xe^y + \ln x$, добијамо да је $e^y = -y/x$ и $e^y = x$. Ако је $x_0$ решење једначине $x^2 + \ln x = 0$, тада је $A(x_0, \ln x_0)$ стационарна тачка функције $f$.

Како је $f''_{x^2} = -\dfrac{y}{x}$, $f''_{xy} = e^y + \dfrac{1}{x}$ и $f''_{y^2} = xe^y$, у тачки $A$ је $a = 1$, $b = x_0 + 1/x_0$ и $c = x_0^2$, па је $ac - b^2 = x_0^2 - (x_0 + 1/x_0)^2 < 0$. Према томе, функција $f$ у тачки $A$ нема локални екстремум.

**88.** За $(x, y) \neq (0, 0)$ имамо да је
$$\begin{aligned} f'_x &= 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} + 3 \cdot \frac{y}{1+(y/x)^2} \cdot \frac{-1}{x^2} \\ &= 1 + \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{3y}{x^2+y^2} \\ &= \frac{x^2+y^2+x-3y}{x^2+y^2} \end{aligned}$$
Слично,
$$f'_y = -2 + \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{3x}{x^2+y^2} = \frac{3x+y-2x^2-2y^2}{x^2+y^2}$$
Из $f'_x = 0$ и $f'_y = 0$ следи $x = y$, $x^2 - x = 0$, $x = 0$ или $x = 1$.

Како функција $f$ није дефинисана у тачки $(0, 0)$, једина стационарна тачка је $A(1, 1)$.

<u>Довољан услов</u>

$$f''_{x^2} = \frac{y^2-x^2+6xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad f''_{xy} = \frac{3y^2-3x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad f''_{y^2} = \frac{x^2-y^2-6xy}{(x^2+y^2)^2}$$
$$a = f''_{x^2}(A) = \frac{3}{2}, \quad b = f''_{xy}(A) = -\frac{1}{2}, \quad c = f''_{y^2}(A) = -\frac{3}{2}, \quad ac - b^2 = -\frac{5}{2} < 0$$
Функција $f$ нема локалних екстремума (у стационарној тачки је седло).

**89.** $f = xg(x)$, $g(x) = e^{y+x\sin y}$, $\quad f'_x = g + xg' = (1+x\sin y)g(x,y)$, $\quad f'_y = x(1+x\cos y)g(x,y)$

Из услова $f'_x = 0$ и $f'_y = 0$ добијамо систем
$$1 + x\cos y = 0, \quad 1 + x\sin y = 0$$

из којег следи да је $x\cos y = x\sin y$. Како је $x \neq 0$ (због $f'_x = 0$), то је $\cos y = \sin y$. Према томе, стационарне тачке су $A_k\left(-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$ и $B_k\left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)$ за $k \in \mathbb{Z}$.

Да ли су у овим тачкама локални екстремуми?

Налажењем парцијалних извода другог реда добијамо да је

$$f''_{x^2} = (x\sin y + 2)\sin y g(x,y), \quad f''_{y^2} = (x^2\cos^2 y + 2x\cos y - x\sin y + 1)g(x,y),$$

$$f''_{xy} = (x^2\sin y\cos y + x\sin y + 2x\cos y + 1)g(x,y)$$

У тачки $A_0(-\sqrt{2}, \pi/4)$ је

$$f''_{x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\pi/4-1}, \quad f''_{y^2} = -\sqrt{2}e^{\pi/4-1}, \quad f''_{xy} = -e^{\pi/4-1}, \quad f''_{x^2}\cdot f''_{y^2} - (f''_{xy})^2 = -2e^{\pi/2-2} < 0.$$

Према томе, у тачки $A_0$ није локлани екстремум функције $f$.

Слично важи и за остале стационарне тачке.

**90.** $dz = -\dfrac{4x+8z}{2z+8x-1}dx - \dfrac{4y}{2z+8x-1}dy$

$\left.\begin{aligned} 4x+8z &= 0 \\ 4y &= 0 \end{aligned}\right\}$, $A(-2,0)$, $z(A) = 1$, $B(16/7, 0)$, $z(B) = -8/7$

$d^2z(A) = -4dx^2 - 4dy^2 < 0, \quad d^2z(B) = \dfrac{28}{23}(dx^2 + dy^2) > 0$

$f_{\max} = f(A) = 1, \ f_{\min} = f(B) = -\frac{8}{7}$

**91.** Нека је

$$F(x,y,z) = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{10x-2y-2z}{10z-2x-2y} = -\frac{5x-y-z}{5z-x-y}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{10y-2x-2z}{10z-2x-2y} = -\frac{5y-x-z}{5z-x-y}$$

Из система

$$5x - y - z = 0, \quad 5y - x - z = 0, \quad F(x,y,z) = 0$$

добијамо: $y = x$ (одузимањем прве две), $z = 4x$, $x = \pm 1$ (из $F = 0$)

Стационарне тачке су: $A(1,1)$ (са $z(A) = 4$) и $B(-1,-1)$ (са $z(B) = -4$)

Да ли су у $A$ и $B$ ЛЕ?

$$z''_{x^2} = -\frac{(5 - z'_x)(5z - x - y) - \overbrace{(5x - y - z)}^{=0\ (A),(B)}(5z'_x - 1)}{(5z - x - y)^2}$$

$$z''_{x^2}(A) = -\frac{5(20-1-1)}{18^2} = -\frac{5}{18}, \quad z''_{x^2}(B) = -\frac{5(-20+1+1)}{18^2} = \frac{5}{18}$$

$$z''_{xy} = -\frac{(-1 - z'_y)(5z - x - y) - \overbrace{(5x - y - z)}^{=0\ (A),(B)}(5z'_y - 1)}{(5z - x - y)^2}$$

$$z''_{xy}(A) = -\frac{-1\cdot 18}{18^2} = \frac{1}{18} = z''_{yx}(A), \quad z''_{xy}(B) = z''_{yx}(B) = -\frac{1}{18}$$

$$z''_{y^2} = -\frac{(5 - z'_y)(5z - x - y) - \overbrace{(5y - x - z)}^{=0\ (A),(B)}(5z'_y - 1)}{(5z - x - y)^2}$$

$$z''_{y^2}(A) = -\frac{5 \cdot 18}{18^2} = -\frac{5}{18}, \quad z''_{y^2}(B) = -\frac{5 \cdot (-18)}{18^2} = \frac{5}{18}$$

$A: ac - b^2 = 5^2/18^2 - 1/18^2 = 24/18^2 > 0,\ a = -5/18 < 0 \Rightarrow f_{\max} = f(A) = 4$

$B: ac - b^2 = 5^2/18^2 - (-1)^2/18^2 = 24/18^2 > 0,\ a = 5/18 > 0 \Rightarrow f_{\min} = f(B) = -4$

**92.** Ако је $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y - 14$, тада је

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}, \tag{1}$$

па стационарне тачке добијамо из система $F'_x = 0$, $F'_y = 0$ и $F = 0$. Како је $F'_x = 2x - z + 2$ и $F'_y = 2y - z + 2$, из једнакости $F'_x = 0$ и $F'_y = 0$ следи да је $y = x$ и $z = 2x + 2$. Заменом $y$ и $z$ у једнакости $F = 0$ добијамо да је $x^2 + 4x - 5 = 0$, што значи да је $x = -5$ или $x = 1$.

Према томе, стационарне тачке су $A(-5,-5)$ и $B(1,1)$, при чему је $f(A) = -8$ и $f(B) = 4$.

Из једнакости (1) следи да је

$$z''_{x^2} = -\frac{(F''_{x^2} + F''_{xz} \cdot z'_x)F'_z - F'_x(F''_{zx} + F''_{z^2} \cdot z'_x)}{F'^2_z}. \tag{2}$$

Обзиром да је у стационарним тачкама $z'_x = F'_x = 0$, из једнакости (2) видимо да у стационарним тачкама важи $z''_{x^2} = -\dfrac{F''_{x^2}}{F'_z}$. На исти начиин из једнакости (1) добијамо да у стационарним тачкама важи $z''_{y^2} = -\dfrac{F''_{y^2}}{F'_z}$ и $z''_{xy} = -\dfrac{F''_{xy}}{F'_z}$. Према томе, за функцију $f$ имамо да је у стационарним тачкама

$$z''_{x^2} = z''_{y_2} = \frac{2}{x + y - 2z}. \quad z''_{xy} = 0$$

(јер је $F''_{x^2} = F''_{y^2} = 2$, $F''_{xy} = 0$ и $F'_z = 2z - x - y$).

Специјално, у тачки $A$ је

$$z''_{x^2} = z''_{y^2} = \frac{1}{3}, \quad d^2 f(A) = \frac{1}{3}(dx^2 + dy^2),$$

а у тачки $B$ је

$$z''_{x^2} = z''_{y^2} = -\frac{1}{3}, \quad d^2 f(B) = -\frac{1}{3}(dx^2 + dy^2).$$

Према томе, функција $f : (x,y) \mapsto z$ у тачки $A$ има локални минимум који је једнак $-8$, а у тачки $B$ има локални максимум који је једнак 4. Дакле,

$$f_{\min} = f(A) = -8, \quad f_{\max} = f(B) = 4.$$

**93.** Ако је $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2$, тада је

$$F'_x = 2x - z + 2, \quad F'_y = 2y - z + 2, \quad F'_z = 2z - x - y + 2, \quad F''_{x^2} = F''_{y^2}, \quad F''_{xy} = 0.$$

Из система $F'_x = 0$, $F'_y = 0$ и $F = 0$ налазимо две стационарне тачке $A(-3+\sqrt{6}, -3+\sqrt{6})$ и $B(-3-\sqrt{6}, -3-\sqrt{6})$, при чему је $f(A) = -4 + 2\sqrt{6}$ и $f(B) = -4 - 2\sqrt{6}$. Како је

$$d^2 f(A) = -\frac{1}{\sqrt{6}}(dx^2 + dy^2), \quad d^2 f(B) = -\frac{1}{\sqrt{6}}(dx^2 + dy^2),$$

функција $f$ у тачки $A$ има локални максимум, а у тачки $B$ има локални минимум.

**94.** Ако је $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3xz-xy-4x+2y+4z+4$, тада је

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}, \tag{3}$$

па стационарне тачке добијамо из система $F'_x=0$, $F'_y=0$ и $F=0$. Како је $F'_x=2x-3z-y-4$ и $F'_y=2y-x+2$, из једнакости $F'_x=0$ и $F'_y=0$ следи да је $z=y$ и $x=2y+2$. Заменом $x$ и $z$ у једнакости $F=0$ добијамо да је $y(y+1)=0$, што значи да је $y=0$ или $y=-1$.

Према томе, стационарне тачке су $A(2,0)$ и $B(0,-1)$, при чему је $f(A)=0$ и $f(B)=-1$.

Из једнакости (3) следи да је

$$z''_{x^2}=-\frac{(F''_{x^2}+F''_{xz}\cdot z'_x)F'_z-F'_x(F''_{zx}+F''_{z^2}\cdot z'_x)}{F'^2_z}. \tag{4}$$

Обзиром да је у стационарним тачкама $z'_x=F'_x=0$, из једнакости (4) видимо да у стационарним тачкама важи $z''_{x^2}=-\dfrac{F''_{x^2}}{F'_z}$. На исти начиин из једнакости (3) добијамо да у стационарним тачкама важи $z''_{y^2}=-\dfrac{F''_{y^2}}{F'_z}$ и $z''_{xy}=-\dfrac{F''_{xy}}{F'_z}$.

Како је $F''_{x^2}=F''_{y^2}=2$, $F''_{xy}=-1$ и $F'_z=2z-3x+4$, за функцију $f$ у стационарним тачкама важи

$$z''_{x^2}=z''_{y2}=\frac{-2}{2z-3x+4},\quad z''_{xy}=\frac{1}{2z-3x+4}.$$

Специјално, у тачки $A$ је

$$z''_{x^2}=z''_{y^2}=1,\ z''_{xy}=-\frac{1}{2},\ d^2f(A)=dx^2-dxdy+dy^2=\frac{1}{2}\left(dx^2+dy^2+(dx-dy)^2\right),$$

а у тачки $B$ је

$$z''_{x^2}=z''_{y^2}=-1,\quad z''_{xy}=\frac{1}{2},\quad d^2f(B)=-dx^2+dxdy-dy^2=-d^2f(A).$$

Према томе, функција $f:(x,y)\mapsto z$ у тачки $A$ има локални минимум који је једнак 0, а у тачки $B$ има локални максимум који је једнак $-1$. Дакле,

$$f_{\min}=f(A)=0,\quad f_{\max}=f(B)=-1.$$

**95.** Диференцирањем по $x$, односно по $y$, добијамо

$$2zz'_x+yz+xyz'_x-y^2-3x^2=0,\quad 2zz'_y+xz+xyz'_y-2y=0. \tag{5}$$

Из ових једнакости следи да је

$$z'_x=\frac{y^2+3x^2-yz}{xy+2z},\quad z'_y=\frac{2xy-xz}{xy+2z}.$$

Решавањем система

$$z'_x=0,\quad z'_y=o,\quad x^2+xyz-xy^2-x^3=0$$

добијамо три стационарне тачке: $A(0,0)$ са $z(A)=0$, $B(-6,6\sqrt{3})$ са $z(B)=12\sqrt{3}$ и $C(-6,-6\sqrt{3})$ са $z(C)=-12\sqrt{3}$.

Новим диференцирањем у једнакостима (5) по $x$, односно по $y$, а затим у првој једнакости из (5) по $y$, налазимо

$$2z'_x z'_x + 2zz''_{x^2} + yz'_x + yz'_x + xyz''_{x^2} - 6x = 0,$$

$$2z'_y z'_y + 2zz''_{y^2} + xz'_y + xz'_y + xyz''_{y^2} - 2x = 0,$$

$$2z'_y z'_x + 2zz''_{xy} + z + yz'_y + xz'_x + xyz''_{xy} - 2y = 0.$$

У тачки $A$ функција нема локални екстремум јер је

$$z''_{x^2}(A) \cdot z''_{y^2}(A) - (z''_{xy}(A))^2 < 0.$$

У тачки $B$ је $z''_{x^2} = \sqrt{3} > 0$ и $z''_{x^2} \cdot z''_{y^2} - (z''_{xy})^2 = \sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} - 0 = 1 > 0$, па функција $f$ у тачки $B$ има локални минимум, $f_{\min} = f(B) = 12\sqrt{3}$.

У тачки $C$ је $z''_{x^2} = -\sqrt{3} < 0$ и $z''_{x^2} \cdot z''_{y^2} - (z''_{xy})^2 = 1 > 0$, па функција $f$ у тачки $C$ има локални максимум, $f_{\max} = f(C) = -12\sqrt{3}$.

**96.** Диференцирањем леве стране дате једнакости, под претпоставком да је $2z+x \neq 0$, добијамо да је

$$f'_x(x,y) = -\frac{z+x-1}{2z+x}, \qquad f'_y(x,y) = -\frac{3y^2+12y}{4z+2x}.$$

Из услова $z = -x+1$, $y(y+4) = 0$ и дате једнакости добијамо две стационарне тачке $A(5,0)$ и $B(-1,0)$. Пошто је

$$f''_{x^2}(x,y) = -\frac{1}{2z+x}, \quad f''_{y^2}(x,y) = -\frac{3y+6}{2z+x}, \quad f''_{xy}(x,y) = 0,$$

добијамо да је $f''_{x^2}(A) = 1/3$, $f''_{y^2}(A) = 2$, $f''_{x^2}(B) = -1/3$, $f''_{y^2}(B) = -2$, па је

$$H_f(A) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad H_f(B) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Према томе, у тачки $A$ је $m_1 > 0$ и $m_2 > 0$, а у тачки $B$ је $m_1 < 0$ и $m_2 > 0$, што значи да је $f_{\min} = f(A) = -4$ и $f_{\max} = f(B) = 2$.

**97.** Диференцирањем по $x$ леве стране дате једнакости имамо

$$4x - 4zz'_x + 2y + yz'_x = 0, \tag{6}$$

одакле добијамо

$$z'_x = -\frac{4x+2y}{-4z+y}.$$

Слично, диференцирањем дате једнакости по $y$ имамо

$$2y - 4zz'_y + 2x + z + yz'_y = 0, \tag{7}$$

одакле добијамо

$$z'_y = -\frac{2x+2y+z}{-4z+y}.$$

Стационарне тачке налазимо решавањем система

$$F(x,y,z)=0, \quad z'_x=0, \quad z'_y=0.$$

Из $z'_x=0$ имамо $y=-2x$, а из $z'_y=0$ имамо $z=2x$. Заменом ових вредности у једнакости $F(x,y,z)=0$ добијамо $x^2=1$. Према томе, стационарне тачке су $A(1,-2)$ и $B(-1,2)$, при чему је $z(A)=2$ и $z(B)=-2$.

Сада треба проверити да ли су у тачкама $A$ и $B$ локални екстремуми дате функције $f$. Диференцирањем једнакости (6) по $x$, односно по $y$ добијамо

$$4-4z'_xz'_x-4zz''_{x^2}+yz''_{x^2}=0,$$

$$-4z'_yz'_x-4zz''_{xy}+2+z'_x+yz''_{xy}=0,$$

а диференцирањем једнакости (7) по $y$ добијамо

$$2-4z'_yz'_y-4zz''_{y^2}+z'_y+z'_y+yz''_{y^2}=0.$$

Из ових једнакости налазимо да је

$$a=z''_{x^2}(A)=\frac{2}{5}, \quad b=z''_{xy}(A)=\frac{1}{5}, \quad c=z''_{y^2}(A)=\frac{1}{5}.$$

Како је $ac-b^2=\dfrac{1}{25}>0$ и $a>0$, у тачки $A$ је локални минимум, $f_{\min}=f(A)=2$. Слично добијамо да је у тачки $B$ локални максимум, $f_{\max}=f(B)=-2$, јер је у њој $a=-\dfrac{2}{5}$, $b=c=-\dfrac{1}{5}$, $ac-b^2=\dfrac{1}{25}>0$, $a<0$.

**98.** Диференцирањем по $x$ леве стране дате једнакости имамо

$$-z^2\cdot z'_x+yz+xyz'_x+y^2+2xy=0, \tag{8}$$

одакле добијамо

$$z'_x=\frac{yz+y^2+2xy}{z^2-xy}.$$

Слично, диференцирањем дате једнакости по $y$ имамо

$$-z^2\cdot z'_y+xz+xyz'_y+2xy+x^2=0, \tag{9}$$

одакле добијамо

$$z'_y=\frac{xz+2xy+x^2}{z^2-xy}.$$

Стационарне тачке налазимо решавањем система

$$F(x,y,z)=0, \quad z'_x=0, \quad z'_y=0,$$

где је

$$F(x,y,z)=8-\frac{z^3}{3}+xyz+xy^2+x^2y.$$

Из $z'_x=0$ и $z'_y=0$ следи да је $y=x$ и $z=-3x$. Заменом $y$ са $x$ и $z$ са $-3x$ у $F(x,y,z)=0$ добијамо да је $x^3=-1$, односно $x=-1$. Према томе, једина стационарна тачка функције $f$ је тачка $A(-1,-1)$, при чему је $z(A)=3$.

Сада треба проверити да ли је у тачки $A$ локални екстремум функције $f$.

Диференцирањем једнакости (8) по $x$, односно по $y$ добијамо

$$-2zz'_x z'_x - z^2 z''_{x^2} + yz'_x + yz'_x + xyz''_{x^2} + 2y = 0,$$

$$-2zz'_y z'_x - z^2 z''_{xy} + z + yz'_y + xz'_x + xyz''_{xy} + 2y + 2x = 0,$$

а диференцирањем једнакости (9) по $y$ добијамо

$$-2zz'_y z'_y - z^2 z''_{y^2} + xz'_y + xz'_y + xyz''_{y^2} + 2x = 0.$$

Из ових једнакости налазимо да је

$$a = z''_{x^2}(A) = -\frac{1}{4}, \quad b = z''_{xy}(A) = -\frac{1}{8}, \quad c = z''_{y^2}(A) = -\frac{1}{4}.$$

У тачки $A$ је локални максимум, $f_{\max} = f(A) = 3$, јер је $ac - b^2 = \dfrac{3}{64} > 0$ и $a < 0$.

**99.** Диференцирањем по $x$ леве стране дате једнакости имамо

$$3z^2 \cdot z'_x + 2zy \cdot z'_x - 2x + 4 = 0, \tag{10}$$

одакле добијамо

$$z'_x = \frac{2x - 4}{3z^2 + 2zy}.$$

Слично, диференцирањем дате једнакости по $y$ имамо

$$3z^2 \cdot z'_y + 2zy \cdot z'_y + z^2 - 2y = 0, \tag{11}$$

одакле добијамо

$$z'_y = \frac{2y - z^2}{3z^2 + 2zy}.$$

Стационарне тачке налазимо решавањем система

$$F(x, y, z) = 0, \quad z'_x = 0, \quad z'_y = 0,$$

где је

$$F(x, y, z) = z^3 + z^2 y - x^2 - y^2 + 4x - 4.$$

Из $z'_x = 0$ и $z'_y = 0$ следи да је $x = 2$ и $z^2 = 2y$. Заменом $y$ са $z^2/2$ и $x$ са 2 у $F(x, y, z) = 0$ добијамо да је $z = -4$. Према томе, јединa стационарна тачка функције $f$ је тачка $A(2, 8)$, при чему је $z(A) = -4$.

Сада треба проверити да ли је у тачки $A$ локални екстремум функције $f$.

Диференцирањем једнакости (10) по $x$, односно по $y$ добијамо

$$6zz'_x z'_x + 3z^2 z''_{x^2} + 2yz'_x z'_x + 2zyz''_{x^2} - 2 = 0,$$

$$6zz'_y z'_x + 3z^2 z''_{xy} + 2yz'_y z'_x + 2zz'_x = 0,$$

а диференцирањем једнакости (11) по $y$ добијамо

$$6zz'_y z'_y + 3z^2 z''_{y^2} + 2yz'_y z'_y + 2zyz''_{y^2} + 2zz'_y + 2zz'_y - 2 = 0.$$

Из ових једнакости (узимајући у обзир да је $z'_x(A) = z'_y(A) = 0$) налазимо да је

$$a = z''_{x^2}(A) = -\frac{1}{8}, \quad b = z''_{xy}(A) = 0, \quad c = z''_{y^2}(A) = -\frac{1}{8}.$$

У тачки $A$ је локални максимум јер је $ac - b^2 = \dfrac{1}{64} > 0$ и $a < 0$. Према томе, $f_{\max} = f(A) = -4$.

**100.** *Прво решење.* Диференцирањем по $x$ дате једнакости имамо

$$3z + 3xz'_x + yz'_x - \frac{1}{x} = 0, \tag{12}$$

одакле добијамо

$$z'_x = \frac{1 - 3xz}{3x^2 + xy}.$$

Приметимо да је $3x^2 + xy \neq 0$ јер је $xy > 0$.

Слично, диференцирањем дате једнакости по $y$ имамо

$$3xz'_y + z + yz'_y - \frac{1}{y} = 0, \tag{13}$$

одакле добијамо $z'_y = \dfrac{1 - yz}{3xy + y^2}$.

Из система

$$1 - 3xz = 0, \quad 1 - yz = 0, \quad 3xz + yz - \ln(3xy) = 2$$

добијамо две стационарне тачке $A(1/3, 1)$ и $B(-1/3, -1)$, при чему је $z(A) = 1$ и $z(B) = -1$.

Диференцирањем једнакости (12) најпре по $x$, а затим и по $y$, као и једнакости (13) по $y$, узимајући у обзир да је $z'_x(A) = z'_y(A) = z'_x(B) = z'_y(B) = 0$, добијамо да је у стационарним тачкама

$$(3x + y)z''_{x^2} + \frac{1}{x^2} = 0, \quad z''_{xy} = 0, \quad (3x + y)z''_{y^2} + \frac{1}{y^2} = 0.$$

Заменом одговарајућих вредности налазимо да је

$$z''_{x^2}(A) = -z''_{x^2}(B) = -9/2, \quad z''_{y^2}(A) = -z''_{y^2}(B) = -1/2,$$

што значи да је у тачки $A$ локални максимум, а у тачки $B$ локални минимум.

Према томе, $f_{\min} = f(B) = -1$ и $f_{\max} = f(A) = 1$.

*Напомена.* Задатак је решаван сматрајући да је функција $f$ имплицитно дефинисана датом једнакошћу. Међутим, из те једнакости имамо и експлицитно вредност функције $f$ (видети Треће решење.)

*Друго решење.* Ако је

$$F(x, y, z) = 3xz + yz - \ln(3xy) - 2,$$

тада је

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{3z - 1/x}{3x + y}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{z - 1/y}{3x + y}.$$

Стационарне тачке $A$ и $B$ добијамо решавањем система

$$3z - \frac{1}{x} = 0, \quad z - \frac{1}{y} = 0, \quad F(x, y, z) = 0.$$

Налажењем парцијалних извода другог реда добијамо

$$z''_{x^2} = \frac{-9x + 18x^2z - y}{x^2(3x + y)^2}, \quad z''_{y^2} = \frac{-3y + 2zy^2 - 3x}{y^2(3x + y)^2}, \quad z''_{xy} = \frac{-y + 6xyz - 3x}{xy(3x + y)^2}.$$

Даље исто као у Првом решењу.

*Треће решење.* Из дате једнакости следи да је

$$f(x,y) = z = -\frac{2+\ln(3xy)}{3x+y}, \quad xy > 0.$$

Налажењем парцијалних извода добијамо

$$f'_x = \frac{-3x+y+-3x\ln(3xy)}{x(3x+y)^2}, \quad f'_y = \frac{3x-y-y\ln(3xy)}{y(3x+y)^2},$$

$$f''_{x^2} = \frac{9x^2-12xy-y^2+18x^2\ln(3xy)}{x^2(3x+y)^3},$$

$$f''_{xy} = \frac{6xy-y^2-9x^2+6xy\ln(3xy)}{xy(3x+y)^3},$$

$$f''_{y^2} = \frac{-9x^2-12xy+y^2+2y^2\ln(3xy)}{y^2(3x+y)^3},$$

а даље исто као у Првом решењу.

**101.** Диференцирањем у датој једнакости по $x$ имамо

$$12xz + 6x^2z'_x + 3y^2z'_x + 3z^2z'_x = 0, \tag{14}$$

одакле добијамо

$$z'_x = -\frac{4xz}{2x^2+y^2+z^2}.$$

Слично диференцирањем по $y$ добијамо

$$z'_y = -\frac{2yz}{2x^2+y^2+z^2}.$$

Очигледно да је $A(0,0)$ једина стационарна тачка функције $f$.

Диференцирањем у једнакости (14) по $x$ и заменом $x = y = z'_x = 0$ и $z = -1$ налазимо да је $a = z''_{x^2}(A) = 4$. Слично добијамо $b = z''_{xy}(A) = 9$ и $c = z''_{y^2}(A) = 2$. Како је $ac - b^2 > 0$ и $a > 0$ у тачки $A$ функција $f$ има локални минимум који је једнак $-1$.

**102.** Дати услов може да се напише у облику $F(x,y,z) = 0$, где је

$$F(x,y,z) = x^2z + y^2z - 2xz^2 - 2yz^2 - 2.$$

Диференцирањем по $x$ имамо

$$2xz + x^2z'_x + y^2z'_x - 4xzz'_x - 2z^2 - 4yzz'_x = 0, \tag{15}$$

одакле добијамо

$$z'_x = \frac{2z^2-2xz}{x^2+y^2-4xz-4yz}.$$

Слично диференцирањем по $y$ добијамо

$$z'_y = \frac{2z^2-2yz}{x^2+y^2-4xz-4yz}.$$

Решавањем система $z'_x = 0$, $z'_y = 0$, $F(x,y,z) = 0$ добијамо да је $A(-1,-1)$ једина стационарна тачка функције $f$, при чему је $f(A) = -1$.

Диференцирањем у једнакости (15) по $x$ и заменом $x = y = z = -1$ и $z'_x = 0$ налазимо да је $a = z''_{x^2}(A) = -1/3$. Слично добијамо $b = z''_{xy}(A) = 0$ и $c = z''_{y^2}(A) = -1/3$. Како је $ac - b^2 > 0$ и $a < 0$ у тачки $A$ функција $f$ има локални максимум који је једнак $-1$.

*Напомене.*

1. Изразе за $z'_x$ и $z'_y$ можемо добити и помоћу функције $F$,

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

2. Изразе за $z'_y$ и $z''_{y^2}$ можемо и директно писати из израза за $z'_x$ и $z''_{x^2}$ тако што заменимо $x$ са $y$ и $y$ са $x$ (обзиром на симетрију функције $F$).

3. Из дате једнакости $z$ може и експлицитно да се изрази као функција променљивих $x$ и $y$ (квадратна једначина по $z$), с тим што постоје две такве функције

$$z_{1/2} = \frac{x^2 + y^2 \pm \sqrt{(x^2+y^2)^2 - 16(x+y)}}{4(x+y)}.$$

**103.** Ако је $F(x,y,z) = z^3 + xyz + x^2 + 2y^2 + 8$, тада је

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{yz + 2x}{3z^2 + xy}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{xz + 4y}{3z^2 + xy}.$$

Стационарне тачке добијамо решавањем система

$$2x + zy = 0, \quad zx + 4y = 0, \quad F(x,y,z) = 0.$$

1. Ако је $z^2 \neq 8$, прве две једначине имају тривијално решење (по $x$ и $y$), при чему из треће једначине ($F = 0$) добијамо $z = -2$. У том случају имамо стационарну тачку $A(0,0)$ за коју је $z(A) = -2$.

2. Ако је $z^2 = 8$, односно $z = 2\sqrt{2}$ или $z = -2\sqrt{2}$, систем нема решења.

Према томе, једина стационарна тачка је $A(0,0)$. Налажењем парцијалних извода другог реда добијамо $z''_{x^2}(A) = -\dfrac{1}{6}$, $z''_{xy}(A) = \dfrac{1}{6}$ и $z''_{y^2}(A) = -\dfrac{1}{3}$. Како је

$$z''_{x^2}(A) \cdot z''_{y^2}(A) - \left(z''_{xy}(A)\right)^2 > 0, \quad z''_{x^2}(A) < 0,$$

то је $f_{\max} = f(A) = -2$.

**104.** Из дате једнакости, диференцирањем по $x$ и по $y$, добијамо

$$6x - 2y - 4zz'_x + 8 = 0, \quad -2x + 2y - 4zz'_y - 4 = 0, \tag{16}$$

одакле имамо да је

$$z'_x = \frac{3x - y + 4}{2z}, \quad z'_y = \frac{y - x - 3}{2x}.$$

Из једнакости $z'_x = 0$ и $z'_y = 0$, узимајући у обзир да је $z > 0$, добијамо само једну стационарну тачку $A(-1,1)$.

Новим диференцирањем у једнакостима (16) по $x$, односно по $y$, а затим и у првој једнакости из (16) по $y$, добијамо

$$6 - 4z'_x z'_x - 4zz''_{x^2} = 0, \quad -2 - 4z'_y z'_x - 4zz''_{xy} = 0, \quad 2 - 4z'_y z'_y - zz''_{y^2} = 0,$$

одакле налазимо да је

$$a = z''_{x^2}(A) = \frac{3}{2}, \quad b = z''_{xy}(A) = -\frac{1}{2}, \quad c = z''_{y^2}(A) = \frac{1}{2}.$$

Како је $ac - b^2 = \dfrac{1}{2}$ и $a > 0$, то је $f_{\min} = f(A) = \sqrt{7}$.

**105.** Из дате једнакости, диференцирањем по $x$ и по $y$, добијамо

$$2x + y + 2zz'_x = 0, \quad x + 2y + 2zz'_y - 3 = 0 \tag{17}$$

из којих следи да је

$$z'_x = -\frac{2x+y}{2z}, \quad z'_y = \frac{3-x-2y}{2z}.$$

Решавањем система $z'_x = 0$, $z'_y = 0$, односно $2x+y = 0$, $x+2y = 3$, налазимо стационарну тачку $A(-1, 2)$. Диференцирањем у једнакостима (17) добијамо једнакости

$$2 + 2z'_x z'_x + 2zz''_{x^2} = 0, \quad 1 + 2z'_y z'_x + 2zz''_{xy} = 0, \quad 2 + 2z'_y z'_y + 2zz''_{x^2} = 0$$

из којих следи да је

$$z''_{x^2}(A) = -\frac{1}{2} = a, \quad z''_{y^2}(A) = -\frac{1}{2} = c, \quad z''_{xy}(A) = -\frac{1}{4} = b.$$

Како је $ac - b^2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{16} > 0$ и $a < 0$, то је $z_{\max} = z(A) = 2$.

**106.** Први парцијални изводи дате функције су

$$z'_x = \frac{3(2-z-x^2)}{2z+3x+2y}, \; z'_y = \frac{2(1-y-z)}{2z+3x+2y}. \tag{18}$$

Из услова $z'_x = 0$, $z'_y = 0$ добијамо $z = 2 - x^2$ и $y = 1 - z = x^2 - 1$. Заменом израза за $y$ и $z$ у датој једначи добијамо $x^3 + x^2 - 2 = 0$. Ова једначина има једно реално решење ($x = 1$), па је $M(1, 0)$ стационарна тачка и $z(1, 0) = 1$. Диференцирањем по $x$ у првој једнакости у (18) налазимо

$$z''_{x^2} = 3 \cdot \frac{(-z'_x - 2x)(2z+3x+2y) - (2z'_x + 3)(2-z-x^2)}{(2z+3x+2y)^2},$$

а затим заменом координата тачке $M$ и заменом вредности $z(M)$ добијамо $z''_{xx}(1, 0) = -\dfrac{6}{5}$.

Слично се добија да је $z''_{xy}(1, 0) = 0$, $z''_{y^2}(1, 0) = -\dfrac{2}{5}$, па је

$$H_z(M) = \begin{bmatrix} -6/5 & 0 \\ 0 & -2/5 \end{bmatrix}.$$

Како је $m_1 = -6/5 < 0$ и $m_2 = 12/25 > 0$, дата функција у тачки $M(1, 0)$ има локални максимум $z_{max} = 1$.