

Ime, prezime i broj indeksa: _____

25.03.2000.

III KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE I

I GRUPA

1. A) Data je funkcija $f : (x, y) \mapsto |x| + |y| + |x + y|$. U tački (0,0) ispitati diferencijabilnost i odrediti u kom smeru postoje izvodi date funkcije.
B) Dokazati teoremu o dovoljnim uslovima za diferencijabilnost funkcije dve promenljive.
2. Odrediti Taylor-ov polinom drugog stepena kojim se funkcija $f : (x, y) \mapsto z$ definisana implicitno jednačinom $z^2 - x^2y - y^3 + xyz = 0$, $z > 0$, aproksimira u okolini tačke A(0,1).
3. Odrediti lokalne ekstremume funkcije $f : (x, y) \mapsto xy e^{-x^2 - y^2}$.

Ime, prezime i broj indeksa: _____

25.03.2000.

III KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE I

II GRUPA

1. A) Ako je funkcija $g: R \rightarrow R$ dva puta diferencijabilna, dokazati da funkcija $f : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)g(xy)$ identički zadovoljava jednačinu

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 4f.$$

B) Ako je funkcija $u = u(x, y, z)$ diferencijalna u skalarnom polju koje obrazuje u oblasti $D \in R^3$, izvesti formulu za izvod funkcije u smeru datog vektora \vec{s} i dokazati da je $\frac{\partial u}{\partial s}$ jednako projekciji ∇u na ort s .

2. Odrediti Taylor-ov polinom drugog stepena kojim se funkcija $f : (x, y) \mapsto z$ definisana implicitno jednačinom $z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0$, $z > 0$, aproksimira u okolini tačke A(1,1).
3. Odrediti ekstremume funkcije $f : (x, y) \mapsto x^2 - 3xy + y^2$ pri uslovu $xy = -1$.

III KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE I

III GRUPA

1. A) Data je funkcija

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ispitati diferencijabilnost funkcije u tački (0,0).

B) Ako je funkcija $u = u(x, y, z)$ diferencijalna u skalarnom polju koje obrazuje u oblasti $D \in \mathbb{R}^3$, izvesti formulu za izvod funkcije u smeru datog vektora \vec{s} i

dokazati da je $\frac{\partial u}{\partial s}$ jednako projekciji ∇u na ort s .

2. Odrediti lokalne ekstremume funkcije date implicitno jednačom

$$x^3 + (y-1)^2 + z^2 + 3xz + 2yz - 6x = 0.$$

3. Odrediti najveću i najmanju vrednost funkcije
- $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^2 + 2x^2 y$
- na oblasti
- $D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, x^2 - 1 \leq y \leq 2(1-x)\}$
- .

III KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE I

IV GRUPA

1. A) Data je funkcija

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{y}{x} - y^2 \sin \frac{x}{y}, & x \neq 0 \text{ i } y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \text{ ili } x = 0 \end{cases}$$

Dokazati da je $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

B) Dokazati teoremu o dovoljnim uslovima za diferencijabilnost funkcije dve promenljive.

2. Odrediti Taylor-ov polinom drugog stepena kojim se funkcija
- $f : (x, y) \mapsto z$
- definisana implicitno jednačom
- $z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0$
- ,
- $z > 0$
- , aproksimira u okolini tačke
- $A(1,1)$
- .

3. Odrediti lokalne ekstremume funkcije
- $f : (x, y, z) \mapsto e^{-\frac{z}{2}} (2xz + x^2 + y^2 - 3z - 6)$
- .

Група А

1. Дата је функција

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y - xy^4}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (1) Испитати непрекидност функције f .
 (2) Испитати диференцијабилност функције f .
 (3) Испитати у ком смеру постоји извод у тачки $(0, 0)$.

2. Функцију
- $f : (x, y) \mapsto z$
- задату имплицитно једнакошћу

$$z^2 x - x^2 y + y^2 z + 2x - y = 0$$

апроксимирати *Тајлор*-овим полиномом другог реда у околини тачке $A(0, 1)$.

3. Одредити екстремуме функције
- $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - \frac{2}{3}z$
- при условима

$$x + y + z = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Група Б

1. Дата је функција

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy + 2x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (1) Испитати непрекидност функције f .
 (2) Испитати да ли постоје парцијални изводи другог реда у тачки $(0, 0)$.
 (3) Испитати у ком смеру постоји извод у тачки $(0, 0)$.

2. Ако је функција
- F
- диференцијабилна и ако је функција
- $f : (x, y) \mapsto z$
- дата једнакошћу

$$F\left(\frac{x^2}{z}, \frac{z}{y^2}\right) = 0,$$

упростити израз $xf'_x + yf'_y$.

3. Одредити локалне екстремуме функције

$$f : (x, y) \mapsto e^{x+y} (x^2 + xy - y^2).$$