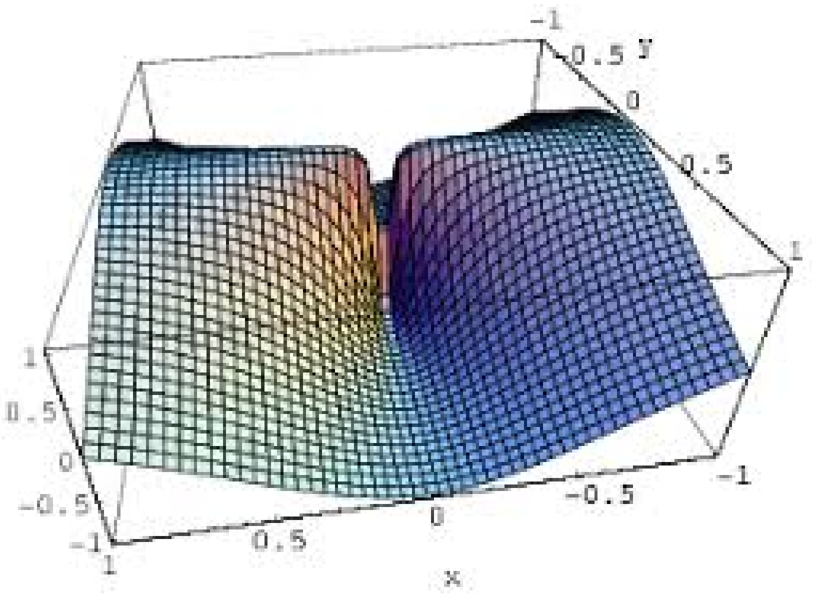
Драган Ђорић

Граничне вредности функција две промењљиве

Задаци са решењима



Студентима генерације 2018

Проф Драган Ђорић

Факултет организационх наука, Београд

Испитати да ли постоји $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ за дату функцију $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ и у случају да постоји израчунати наведену граничну вредност.

1. $f(x,y) = (x-y)\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

2. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

3. $f(x,y) = \dfrac{x^3-y^2}{x^2+y^2}$.

4. $f(x,y) = \dfrac{x+y^3}{x^2+y^2}$.

5. $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

6. $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$.

7. $f(x,y) = \dfrac{y^3-x^3}{x^2+y^2}$.

8. $f(x,y) = x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

9. $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

10. $f(x,y) = \dfrac{x^2y-xy^2}{x^2+y^2}$.

11. $f(x,y) = \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$.

12. $f(x,y) = \dfrac{x^5+y^5}{x^4+y^4}$.

13. $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^5}{x^4+y^4}$.

14. $f(x,y) = \dfrac{x^4y-xy^2}{x^4+y^2}$.

15. $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}$.

16. $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}$.

17. $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$.

18. $f(x,y) = \dfrac{y^4}{x^2+y^4}$.

19. $f(x,y) = \dfrac{xy^4}{x^4+y^6}$.

20. $f(x,y) = \dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4}$.

21. $f(x,y) = \dfrac{x^3y^4}{x^6+y^6}$.

22. $f(x,y) = \dfrac{x^2y^4}{x^4+y^6}$.

23. $f(x,y) = \dfrac{|x|^a|y|^b}{x^2+y^2}, a, b \in \mathbb{R}_+,\ \ a+b > 2.$

24. $f(x,y) = \dfrac{|xy|^\alpha}{(x^2+y^2)^\beta}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+,\ \ \alpha > \beta.$

25. $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

26. $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

27. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

28. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

29. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\left(e^{\sqrt{x^2+y^2}}-1\right)$.

30. $f(x,y) = \dfrac{\sin x \cdot \sin y}{x^2+y^2}$.

31. $f(x,y) = \dfrac{\sin^2 x - y^2}{x^2+y^2}$.

32. $f(x,y) = \dfrac{\sin x \cdot \sin y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

33. $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$.

34. $f(x,y) = \dfrac{\sin|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

35. $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^4+y^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

36. $f(x,y) = \dfrac{xy^2+\sin(x^3+y^5)}{x^2+y^4}$.

37. $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

38. $f(x,y) = \dfrac{y^3-x^4}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

39. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^3}{\sqrt{x^2+y^4}}$.

40. $f(x,y) = \dfrac{x^3-3x^2y}{\sqrt{x^2+y^4}}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^4}}$.

41. $f(x,y) = \dfrac{x-y^2}{\sqrt[3]{x^2+y^4}}$.

42. $f(x,y) = \dfrac{x^3-y^3}{\sqrt{x^4+y^4}}$.

43. $f(x,y) = \dfrac{y^3+x^2y}{\sqrt{x^4+y^4}}$.

44. $f(x,y) = \dfrac{y^3\cos y+x^3\cos x}{\sqrt{x^4+y^4}}$.

45. $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$.

46. $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}\sin\dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2}$.

47. $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

48. $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|}$.

49. $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$.

50. $f(x,y) = \dfrac{x^2\sin y}{x^2+y^2}$.

51. $f(x,y) = \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$.

52. $f(x,y) = \dfrac{\sin x^2+\sin 2xy+\sin y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

53. $f(x,y) = \dfrac{x\sin y-y\sin x}{x^2+y^2}$.

54. $f(x,y) = \dfrac{x^5 + y^4}{\sin^2(x^2+y^2)}$.

55. $f(x,y) = \dfrac{\sin x^2 \sin y}{x^2 + \sinh^2 y}$.

56. $f(x,y) = \dfrac{xy \sin xy}{\sinh x^2 + \sinh y^2}$.

57. $f(x,y) = \dfrac{x^4 - y^4}{\sin(x^2+y^2)}$.

58. $f(x,y) = \dfrac{x^2 \tan y}{x^2 + y^2}$.

59. $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2) + x^2 \sin y}{\sinh(x^2+y^2)}$.

60. $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} \tanh y^2$.

61. $f(x,y) = xy \ln(x^2+y^2)$.

62. $f(x,y) = x^2 \ln(x^2+y^2)$.

63. $f(x,y) = \dfrac{y^4 \ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

64. $f(x,y) = \dfrac{\ln(1+x^4+y^4)}{\sin(x^2+y^2)}$.

65. $f(x,y) = \dfrac{xy + x^2 y \ln|x+y|}{x^2+y^2}$.

66. $f(x,y) = \dfrac{\ln\sqrt{1+x^2+y^2}}{\sinh(x^2+y^2)}$.

67. $f(x,y) = \dfrac{x^4 - y^4}{x^6+y^6} \ln(1+x^4+y^4-x^2y^2)$.

68. $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^6+y^6} \ln(1+x^4+y^4-x^2y^2)$.

69. $f(x,y) = (1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.

70. $f(x,y) = \dfrac{ye^{-1/x^2}}{y^2 + e^{-2/x^2}}$.

71. $f(x,y) = \dfrac{e^{-1/\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$.

72. $f(x,y) = \dfrac{e^{-1/(x^2+y^2)}}{\sin\sqrt{x^2+y^2}}$.

73. $f(x,y) = \dfrac{y^2/2 - x^4/12 + \cos y - \cos(1-\cos x)}{x^4+y^4}$.

Испитати да ли постоји $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ за дату функцију $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ и ако постоји израчунати дату граничну вредност.

74. $f(x,y)=\dfrac{|x|}{y^2}e^{-|x|/y^2}$ за $y\neq 0$ и $f(x,0)=0$.

75. $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^2}{x^2+y}$ за $x^2+y\neq 0$ и $f(x,-x^2)=0$.

76. $f(x,y)=\dfrac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{y}$ за $y\neq 0$ и $f(x,0)=0$.

77. $f(x,y)=\dfrac{\ln(1+x^2y^2)}{y^2}$ за $y\neq 0$ и $f(x,0)=0$.

78. $f(x,y)=\dfrac{1}{y}e^{-1/(x^2y^2)}$ за $xy\neq 0$ и $f(x,y)=0$ за $xy=0$.

79. $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2}e^{-1/|x|}$ за $x\neq 0$ и $f(0,y)=0$.

80. $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2}e^{-y/x^2}$ за $x\neq 0$ и $f(0,y)=0$.

81. $f(x,y)=\dfrac{\sin(x^4-y^4)}{xy}$ за $xy\neq 0$ и $f(x,y)=0$ за $xy=0$.

82. $f(x,y)=xy\ln\left|\dfrac{x}{y}\right|$ за $xy\neq 0$ и $f(x,y)=0$ за $xy=0$.

83. $f(x,y)=y+\dfrac{1}{y}\arctan(x^2y)$ за $y\neq 0$ и $f(x,0)=0$.

84. $f(x,y)=xe^{\arctan\frac{y}{x}}$ за $x\neq 0$ и $f(0,y)=0$.

85. $f(x,y)=\dfrac{xe^x-ye^y}{x-y}$ за $x\neq y$ и $f(x,x)=1$.

Испитати да ли постоји $\lim\limits_{(x,y)\to(0_+,0_+)} f(x,y)$ за дату функцију $f:\mathbb{R}^{+2}\to\mathbb{R}$ и ако постоји израчунати дату граничну вредност.

86. $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}$.

87. $f(x,y)=\dfrac{x^{2a}y^{2b}}{x^{3a}+y^{3b}}$, $a,b>0$.

88. $f(x,y)=\dfrac{x^{2a}y^{2b}}{x^{3a}+y^{3b}}$, $ab<0$.

89. $f(x,y)=\dfrac{x^{2a}y^{2b}}{x^{3a}+y^{3b}}$, $a,b<0$.

Нека je $D = \{(x,y) \mid 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \pi/2\}$. За дату функцију $f : D \to \mathbb{R}$ израчунати $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

90. $f(x,y) = \dfrac{\sin x \sin y}{\tan\sqrt{x^2+y^2}}$.

91. $f(x,y) = x^3y^3\dfrac{\sin(x^2-y^2)}{\tan(x^2+y^2)}$.

Резултати, упутства, решења

1. Како је $|f(x,y)| \le |x-y| \le |x|+|y|$, то је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

2. Рационалисањем имениоца имамо да је

$$f(x,y) = \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2+1}+1,$$

па је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 2$.

3. Не постоји јер је $f(0,y) = -1$, а $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 0$.

4. Не постоји јер $f(x,0) = \dfrac{1}{x} \to +\infty$ када $x \to 0_+$.

Напомена. Да гранична вредност не постоји следи и из тога што је $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x,\sqrt{x}) = 1$.

5. Пошто је

$$|f(x,y)| \le \frac{x^2|x|+y^2|y|}{x^2+y^2} \le |x|+|y|,$$

то је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

6. Не постоји јер је $f(0,y) = 1$ и $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 0$.

7. Из неједнакости

$$|f(x,y)| \le \frac{|y^3|+|x^3|}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{x^2+y^2}|y| + \frac{x^2}{x^2+y^2}|x| \le |y|+|x|,$$

следи да је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

8. Из $|f(x,y)| \le |x|$ следи да је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

9. Из $|f(x,y)| \le |xy|$ следи да је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

10. Пошто је

$$|f(x,y)| \le \frac{|x^2y|}{x^2+y^2} + \frac{|xy^2|}{x^2+y^2} \le |y|+|x|,$$

то је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

11. Не постоји јер је $f(x,0) = 1$ и $f(x,x) = 3$.

12. Из неједнакости

$$|f(x,y)| \le \frac{|x|^5}{x^4+y^4} + \frac{|y|^5}{x^4+y^4} = \frac{x^4}{x^4+y^4}|x| + \frac{y^4}{x^4+y^4}|y| \le |x|+|y|$$

следи да је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

13. Не постоји јер је $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x,0) = +\infty$.

14. Како је
$$|f(x,y)| \leq \frac{x^4}{x^4+y^2}\cdot|y| + \frac{y^2}{x^4+y^2}\cdot|x|,$$
то је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

15. Како је $|f(x,y)| \leq |xy|\cdot\dfrac{y^2}{x^2+y^2} \leq |xy|$, то је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

16. Из $0 \leq f(x,y) \leq y^2$ следи да је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

17. Не постоји јер је $f(0,y) = 0$ и $f(x,x) = 1/2$.

18. Не постоји[1] јер је $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = 0$, а $\lim\limits_{x\to 0} f(x^2,x) = 1/2$.

19. Не постоји јер је $f(0,y) = 0$ и $\lim\limits_{y\to 0} f(y^2,y) = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y^6}{y^8+y^6} = 1$.

20. За $(x,y)\neq(0,0)$ је
$$|f(x,y)| \leq \frac{\max\{|x|,|y|\}^5}{\max\{|x|,|y|\}^4} = \max\{|x|,|y|\} \to 0 \text{ када } (x,y)\to(0,0).$$
Према томе, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Друго решење. Из неједнакости $x^4+y^4 \geq 2x^2y^2$ за $xy\neq 0$ следи
$$|f(x,y)| \leq \frac{|x^3y^2|}{2x^2y^2} = \frac{|x|}{2} \to 0 \text{ када } x\to 0.$$
За $xy = 0$ је $f(x,y) = 0$.

21. За $(x,y)\neq(0,0)$ је
$$|f(x,y)| \leq \frac{\max\{|x|,|y|\}^7}{\max\{|x|,|y|\}^6} = \max\{|x|,|y|\} \to 0 \text{ када } (x,y)\to(0,0).$$
Према томе, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

22. Из
$$f(x,y) \leq \frac{(x^4)^{2/4}(y^6)^{4/6}}{x^4+y^6} \leq \frac{(x^4+y^6)^{1/2}(x^4+y^6)^{2/3}}{x^4+y^4} = (x^4+y^6)^{1/6},$$
следи да је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

23. Проценом као у претходном задатку добијамо да је $|f(x,y)| \leq (x^2+y^2)^{a/2+b/2-1}$, па је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

[1] Занимљиво је да гранична вредност постоји по сваком правцу, $\lim\limits_{x\to 0} f(x,kx) = 0$.

24. Проценом као у претходна два задатка добијамо да је $|f(x,y)| \leq (x^2+y^2)^{\alpha-\beta}$, па је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

25. Не постоји јер је $f(0,y) = 0$, а $f(x,x) = 1$.

26. Како је $|f(x,y)| \leq \dfrac{|x|}{\sqrt{|x|^2+y^2}}|y| \leq |y|$, то је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

27. Не постоји јер је $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 0$, а $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x,x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

28. Како је $|f(x,y)| \leq \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$, то је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

29. Ако је $g(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ и $h(x,y) = \dfrac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, тада је $f = gh$.

Како је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 1$ и како на основу претходног задатка имамо да је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$, то је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

30. Не постоји јер је $f(0,0) = 0$, а $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = 1$.

31. Не постоји јер је $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 1$, а $f(0,y) = -1$.

32. Како је $|f(x,y)| \leq \dfrac{|x|\cdot|y|}{\sqrt{|x|^2+y^2}}| \leq \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$, то је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

33. Из једнакости

$$f(x,y) = \frac{2\sin^2\dfrac{x^3+y^3}{2}}{x^2+y^2} = \frac{2\sin^2\frac{x^3+y^3}{2}}{\left(\frac{x^3+y^3}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{x^3+y^3}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{x^2+y^2}$$

имамо да је $f(x,y) = g(x,y)h(x,y)$, где је $h(x,y) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(x^3+y^3)^2}{x^2+y^2}$. Како $g(x,y)\to 1$ и $h(x,y)\to 0$ када $(x,y)\to(0,0)$, то је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

34. Не постоји јер је $f(x,x) = 0$ и $f(x,0)\to 1$ када $x\to 0$.

35. Пошто је $f(x,y) \leq \dfrac{y^2}{x^4+y^2}|x|$, то је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

36. Не постоји јер је $f(x,0) = 0$, а $f(x,\sqrt{x}) \to 1/2$ када $x\to 0_+$.

37. Како је $|f(x,y)| \leq \dfrac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |y|$, то је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

38. Из неједнакости

$$|f(x,y)| \leq \frac{|y^3-x^4|}{x^2+y^2} \leq \frac{y^2}{x^2+y^2}|y| + \frac{x^2}{x^2+y^2}x^2 \leq |y| + x^2$$

следи да је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

39. Из

$$|f(x,y)| \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^4}} + \frac{y^3}{\sqrt{x^2+y^4}} = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^4}}|x| + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^4}}|y| \leq |x|+|y|$$

следи да је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

40. Из неједнакости

$$|f(x,y)| \leq \frac{x^2}{x^2+y^4} \cdot |x-3y| \leq \frac{x^2+y^4}{\sqrt{x^2+y^4}} \cdot |x-3y| = \sqrt{x^2+y^4} \cdot |x-3y|$$

следи да је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

41. Како је

$$|f(x,y)| \leq \frac{|x|+y^2}{\sqrt[3]{x^2+y^4}} \leq \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2+y^4}} \cdot \sqrt[3]{|x|} + \frac{\sqrt[3]{y^4}}{\sqrt[3]{x^2+y^4}} \cdot \sqrt[3]{y^2} \leq \sqrt[3]{|x|} + \sqrt[3]{y^2},$$

то је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

42. Из $|f(x.y)| \leq \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4+y^4}}|x| + \dfrac{y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}|y| \leq |x|+|y|$ следи да је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

43. Из $|f(x,y)| \leq \dfrac{y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}|y| + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4+y^4}}|y| \leq 2|y|$ следи да је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

44. Из

$$|f(x,y)| \leq \frac{y^3}{\sqrt{x^4+y^4}} + \frac{x^3}{\sqrt{x^4+y^4}} \leq \frac{y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}|y| + \frac{x^2}{\sqrt{x^4+y^4}}|x| \leq |y|+|x|$$

следи да је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

45. Када $(x,y)\to(0,0)$ имамо да је $f(x,y) \sim g(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ и $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$.

Према томе, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

46. Када $(x,y)\to(0,0)$ имамо да је $f(x,y) \sim g(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{(x^2+y^2)^2}$ и $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 00$.

Према томе, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

47. Из $|f(x,y)| \leq \dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x|$ следи да је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

48. Пошто је

$$|f(x,y)| \leq \frac{|\sin xy|}{|x|+|y|} \leq \frac{|xy|}{|x|+|y|} \leq |x|,$$

то је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

49. Не постоји јер је $f(x,0)=0$, а $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x)=1/2$.

50. Из $|f(x,y)| = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}|\sin y| \le |y|$ следи да је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

51. Ако је $t=\sqrt{x^2+y^2}$, тада је $f(x,y)=\dfrac{1-\cos t}{t^2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin^2\frac{t}{2}}{(t/2)^2}=g(t)$, па је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{t\to 0_+} g(t)=\dfrac{1}{2}$.

52. Пошто је

$$|f(x,y)| \le \frac{x^2+2|xy|+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{2(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2\sqrt{x^2+y^2},$$

то је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

53. На основу Маклоренове формуле имамо да је[2] $|\sin t - t| \le \dfrac{t^2}{2}$. Из ове неједнакости следи да је

$$|f(x,y)| \le \frac{1}{2}\cdot\frac{|x|y^2+|y|x^2}{x^2+y^2} \le \frac{1}{2}(|x|+|y|).$$

Према томе, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

Напомена. Може и

$$f(x,y) \sim \frac{x(y-y^3/6)-y(x-x^3/6)}{x^2+y^2} = \frac{1}{6}\cdot\frac{yx^3-xy^3}{x^2+y^2} = \frac{1}{6}g(x,y)$$

када $(x,y)\to(0,0)$, при чему тада $g(x,y)\to(0,0)$.

54. Не постоји јер је $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$, а $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y)=1$.

55. Пошто је

$$|f(x,y)| = \frac{|\sin x^2|}{x^2+\sinh^2 y}|\sin y| \le \frac{x^2}{x^2+\sinh^2 y}|y| \le |y|,$$

то је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

56. За $x\ge 0$ важи неједнакост[3] $\sinh x \ge x$. На основу ове једнакости имамо да је

$$|f(x,y)| \le \frac{|xy\sin xy|}{x^2+y^2} \le \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \le y^2,$$

па је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

57. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)}(x^2-y^2)=0.$

[2] Из једнакости $\sin t = t - \sin\theta\dfrac{t^2}{2}$, где је $\theta\in(0,t)$, имамо наведену неједнакост.

[3] Нека је $g(x)=\sinh x - x$. Како је $e^x+e^{-x}\ge 2$, то је $g'(x)\ge 0$, па је функција g за $x\ge 0$ растућа. Према томе, за $x\ge 0$ важи $0=g(0)\le g(x)$.

58. Из $|f(x,y)| = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}|\tan y| \le |\tan y|$ следи да је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

59. Како је $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sinh t}{t} = 1$, то је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{\sinh(x^2+y^2)} = 1$, а из

$$\left|\frac{x^2\sin y}{\sinh(x^2+y^2)}\right| \le \frac{x^2+y^2}{\sinh(x^2+y^2)}|\sin y|$$

следи да је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2\sin y}{\sinh(x^2+y^2)} = 0$. Према томе, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$.

60. За $x \ge 0$ важи неједнакост[4] $\tanh x \le x$. Из ове неједнакости следи да је

$$|f(x,y)| \le \frac{y^4}{x^2+y^4}|x| \le |x|,$$

па је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

61. Како је $\lim\limits_{t\to 0} t\ln t = 0$ и како је[5]

$$|f(x,y)| \le \frac{1}{2}|(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)|,$$

то је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

62. Како је $\lim\limits_{t\to 0} t\ln t = 0$ и како је $|f(x,y) \le (x^2+y^2)|ln(x^2+y^2)|$, то је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

63. Како је $\lim\limits_{t\to 0} t\ln t = 0$ и како је

$$|f(x,y)| = \frac{y^2}{x^2+y^2}y^2|\ln(x^2+y^2)| \le |(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)|,$$

то је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

64. Како је

$$f(x,y) = \frac{\ln(1+x^4+y^4)}{x^4+y^4}\cdot\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\cdot\frac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)}$$

и како је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0$, а $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t} = 1$, то је и $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

65. Не постоји јер је $f(0,y) = 0$, а $f(x,x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}x\ln|2x| \to 0$ када $x \to 0$.

66. Како је $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{\sinh t} = 1$ и како је $f(x,y) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{\sinh(x^2+y^2)} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\ln(1+t)}{\sinh t}$, где је $t = x^2+y^2$, то је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1/2$.

[4] Ако је $g(x) = \tanh x - x$, тада је $g'(x) = -\dfrac{(e^{2x}-1)^2}{(e^{2x}+1)^2} \le 0$, па је g опадајућа функција. Како је $g(0) = 0$, то је $g(x) \le 0$ за $x \ge 0$.

[5] Може и $|f(x,y)| \le \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}|\ln(x^2+y^2)| = (x^2+y^2)|\ln(x^2+y^2)|$.

67. Како је $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1$ и како је

$$f(x,y)=\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}\cdot\frac{\ln(1+x^4+y^4-x^2y^2)}{x^4+y^4-x^2y^2}=(x^2-y^2)\frac{\ln(1+x^4+y^4-x^2y^2)}{x^4+y^4-x^2y^2},$$

то је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

68. Како је $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1$ и како је

$$f(x,y)=\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\cdot\frac{\ln(1+x^4+y^4-x^2y^2)}{x^4+y^4-x^2y^2},$$

то је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=1$.

69. Како је $f(x,y)=g(x,y)^{h(x,y)}$, где је $g(x,y)=(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2y^2}}$ и $h(x,y)=-\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$, и како $g(x,y)\to e$ и $h(x,y)\to 0$ када $(x,y)\to(0,0)$, то је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=1$.

70. Не постоји јер је

$$\lim_{t\to 0_+} f\left(\frac{1}{\sqrt{\ln t}},\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{2},\qquad \lim_{t\to 0_+} f\left(\frac{1}{\sqrt{\ln t}},\frac{1}{t^2}\right)=0.$$

71. Из неједнакости[6] $e^{-1/t}<6t^3$ за $t>0$ следи да је $0<f(x,y)<6\sqrt{x^2+y^2}$, па је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

72. Из неједнакости[7] $e^{-1/t}<t$ за $t>0$ следи да је

$$0<f(x,y)<\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sin\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{x^2+y^2},$$

па је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

73. Нека је $f=g/h$, где је $h(x,y)=x^4+y^4$. За $(x,y)\to(0,0)$ имамо да је

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4),\quad \cos(1-\cos x)=1-\frac{x^4}{8}+o(x^4),\quad \cos y=1-\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{24}+o(y^4),$$

па је у том случају

$$f(x,y)=\frac{x^4+y^4}{24}+o(x^4+y^4).$$

Према томе, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\dfrac{1}{24}$.

74. Не постоји јер је $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x)=0$ и $\lim\limits_{y\to 0} f(y^2,y)=\dfrac{1}{e}$.

[6] Ова неједнакост следи из неједнакости $6t^3e^{1/t}>1$ која се лако доказује помоћу Маклоренове формуле за функцију $x\mapsto e^x$.

[7] Ова неједнакост следи из неједнакости $te^{1/t}>1$ која се лако доказује помоћу Маклоренове формуле за функцију $x\mapsto e^x$.

75. Не постоји јер је $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 0$, а $\lim f(x, x^3 - x^2) = 1$.

76. Из

$$0 \le 1 - \cos\sqrt{|xy|} = 2\sin^2\frac{|xy|}{2} \le \frac{|xy|}{2}$$

следи да је $|f(x,y)| \le |x|/2$ за свако $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, па је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

77. За $(x,y) \to (0,0)$ имамо да је $\ln(z + x^2y^2) \sim x^2y^2$, па је тада $f(x,y) \sim x^2$. Према томе, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

78. Из неједнакости $e^{-1/t} < t$ за $t > 0$ имамо да је $|f(x,y)| \le x^2|y|$ за свако $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, па је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

79. Из неједнакости[8] $e^{-1/t} < 2t^2$ за $t > 0$ имамо да је $e^{-1/|x|} < 2x^2$, па је $|f(x,y)| \le 2|y|$ за свако $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Према томе, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

80. За $x \in \mathbb{R}$ и $y \in [1/2, 3/2]$ је $|f(x,y)| \le \dfrac{3}{2x^2}e^{-1/(2x^2)}$. Из неједнакости $e^{-1/t} < 2t^2$ за $t > 0$ имамо да је $e^{-1/(2x^2)} < 2(2x^2)^2 = 8x^4$, па је $|f(x,y)| \le 12x^2$ за свако $(x,y) \in \mathbb{R} \times [1/2, 3/2]$. Према томе, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

81. Не постоји јер је $f(x,x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0} f(x, x^3) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^4 - x^{12})}{x^4} = 1$.

82. Пошто је $\lim\limits_{t\to 0} t\ln|t| = 0$, постоји околина тачке $(0,0)$ у којој важи $|x\ln|x|| < 1$ и $|y\ln|y|| < 1$ за $xy \ne 0$. Тада је

$$|f(x,y)| = |xy\ln|x| - xy\ln|y|| \le |y||x\ln|x|| + |x||y\ln|y|| < |y| + |x|.$$

Према томе, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

83. Из неједнакости[9] $\operatorname{arctan} t < t$ за $t > 0$ следи да је $|f(x,y)| \le |y| + x^2$, па је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

84. Како је $|f(x,y)| \le |x|e^{\pi/2}$, то је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

85. Ако за функцију $g(x) = xe^x$ применимо Лагранжову теорему на интервалу $[x,y]$, добијамо да је

$$|f(x,y)| = \frac{|g(x) - g(y)|}{|x-y|} = \frac{|g'(c)||x-y|}{|x-y|} = |g'(c)|$$

за неки c између x и y. Како је $g'(x) = (1+x)e^x$ и како $c \to 0$ када $(x,y) \to (0,0)$, то значи да тада $g'(c) \to 1$, па је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$.

[8] Ова неједнакост следи из неједнакости $2t^2e^{1/t} > 1$ која се лако доказује помоћу Маклоренове формуле за функцију $x \mapsto e^x$.

[9] Ако је $g(t) = t - \operatorname{arctan} t$, тада је $g'(t) = 1 - \dfrac{1}{1+t^2} \ge 0$, па је функција g растућа. Како је $g(0) = 0$, то значи да је $g(t) \ge 0$ за $t > 0$.

86. Пошто је $t+\frac{1}{t}\geq 2$ за $t>0$, то је

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{xy}}{(x/y)^{3/2}+(y/x)^{3/2}}\leq\frac{1}{2}\sqrt{xy},$$

па је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

87. Ако је $u=x^a$ и $v=y^b$, тада је $f(x,y)=g(u,v)=\dfrac{u^2v^2}{u^3+v^3}$ и $u\to 0_+$, $v\to 0_+$ када $(x,y)\to(0_+,0_+)$. Према претходном задатку $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(u,v)=0$.

88. Ако је $u=x^a$ и $v=y^b$ и ако је $a>0$ и $b<0$, тада је

$$0\leq f(x,y)=g(u,v)=\frac{u^2v^2}{u^3+v^3}=\frac{u^2}{u^3/v^2+v}\leq\frac{u^2}{v},$$

при чему и $u\to 0_+$, $v\to+\infty$ када $(x,y)\to(0_+,0_+)$. Према томе, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(u,v)=0$.

Исто важи и у случају $a<0$ и $b>0$.

89. Ако је $u=x^a$ и $v=y^b$, тада је $f(x,y)=g(u,v)=\dfrac{u^2v^2}{u^3+v^3}$ и $u,v\to+\infty$, када $(x,y)\to(0_+,0_+)$. За $u=v$ имамо да је $g(u,v)=\dfrac{u}{2}\to+\infty$ када $u\to+\infty$, што значи да дата гранична врдност не постоји.

90. Пошто је

$$|f(x,y)|\leq\frac{|xy|}{\tan\sqrt{x^2+y^2}}\leq\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\tan\sqrt{x^2+y^2}}|y|,$$

то је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

91. Како је $|f(x,y)|\leq\dfrac{x^2+y^2}{\tan(x^2+y^2)}|xy|^3$, то је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.