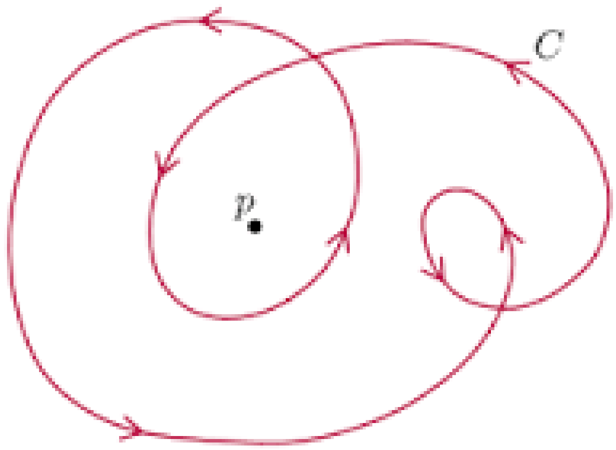
Драган Ђорић

Други колоквијуми из М3

Решења неких задатака

[1999 - 2016]



Студентима генерације 2015

Проф Драган Ђорић

Факултет организационх наука, Београд

М А Т Е М А Т И К А 3

Други колоквијуми са решењима неких задатака

1999

1. Одредити опште решење једначине

$$xu'_x + (y+u)u'_z + (z+u)u'_y - y = z.$$

2. Нека $f : x + iy \mapsto u + iv$, где је

$$u(x,y) = \alpha(x)\sinh y, \quad v(x,y) = \beta(x)\cosh y.$$

Одредити све функције α и β за које је функција f аналитичка.

3. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y(t) = e^{-3t} - 4\int_0^t e^{-(t-x)}(t-x)^2 y(x)dx.$$

1999

4. Испитати диференцијабилност и аналитичност функције

$$f : z \mapsto (z^2+1)\overline{z}.$$

5. Израчунати $\displaystyle\int_{C^-} \frac{\cos z dz}{z(z+i)^2}$ ако је $C = \{z \mid |z| = 2\}$.

6. Применом Лапласове трансформације решити систем

$$\begin{aligned} x' &= y + e^t \\ y' &= -x - \sin 2t \end{aligned}$$

ако је $x(0) = 1/2$ и $y(0) = 1$.

2000

7. Решити једначину

$$xu'_x + yu'_y + (z+u)u'_z = xy.$$

8. Израчунати $\int_{C^+} \tan(2z)dz$ ако је $C = \{z \mid |z| = 1\}$.

9. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y''(t) + 4y(t) = f(t), \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1$$

ако је $f(t) = 1$ за $0 \le t < 1$ и $f(t) = 0$ за $t \ge 1$.

2000

10. Одредити партикуларно решење једначине

$$2x^2yz'_x + (x^3 + xy^2)z'_y = 2yz$$

за које је $z(x, 0) = x$.

11. Испитати непрекидност и регуларност функције $f : C \to C$ ако је

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}$$

за $z \neq 0$ и $f(0) = 0$.

12. Применом Лапласове трансформације решити систем

$$x'(t) + x(t) = 2y(t), \ y'(t) + x(t) = y(t) + \cos(at), \quad x(0) = y(0) = 0$$

ако је a реалан параметар.

2001

13. Решити једначину

$$(x^2 + z^2)z'_x + (x + z)z'_y = 2xz.$$

14. Израчунати $\int_{C^+} \frac{ze^z dz}{(z-a)^2(z+a)}$ ако је $C = \{z \mid |z| = 1\}$, $a \in C$ и $|a| \neq 1$.

15. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y''(t) + 4y(t) = f(t), \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 0$$

ако је $f(t) = 2t$ за $0 \le t < 1$ и $f(t) = 0$ за $t \ge 1$.

2001

16. Одредити партикуларно решење једначине

$$zz'_x + yz'_y + x^2 + y^2 = z$$

за које је $z(x, 1) = x - x^2$.

17. Одредити $f(z)$ за све аналитичке функције f за које је

$$Re(f(x+iy)) = a\arctan\frac{y}{x} + b \quad (a, b \in R).$$

18. Одредити Лапласову слику функције $f : t \mapsto \dfrac{\sin^2 t}{t^2}$ $(t > 0)$.

2002

19. Решити једначину

$$(u-x)u'_x + (u-y)u'_y = zu'_z + x + y.$$

20. (1) Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{\overline{z}}{z+3}dz$ ако је $C = \{z \mid |z-1| = 2\}$.

(2) Одредити скуп свих тачака у којима је функција f дефинисана са

$$f(x+iy) = x^3 + 3xy^2 + (y^3 + 3x^2y)i$$

диференцијабилна и скуп свих тачака у којима функција f није аналитичка.

21. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y(t) = t\sinh t - \int_0^t (u-t)y(u)du.$$

2002

22. Одредити партикуларно решење једначине

$$(z-y)z'_x = (z+x)z'_y + x + y$$

за које је $z(x,x) = x$.

23. Нека је $f(z) = \dfrac{\overline{z}^2}{z}$ за $z \neq 0$ и $f(0) = 0$.

(1) Испитати диференцијабилност функције f у тачки $z = 0$.

(2) Испитати да ли у тачки $z = 0$ важе Коши Риманови услови.

24. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$x^{(n)}(t) = t \cdot f(t), \quad x(0) = x'(0) = \cdots = x^{(n-1)}(0) = 0$$

ако је $f(t) = 1$ за $t \in [0,1) \cup [2, +\infty)$ и $f(t) = 0$ за $t \in [1,2)$.

2003

25. Решити једначину

$$2yxu'_x - (x^2 - y^2 + z^2)u'_y + 2yzu'_z = 0.$$

26. Испитати диференцијабилност функције $f : z \mapsto \overline{z}e^z$.

27. Применом Лапласове трансформације одредити опште решење једначине

$$y'' - 2y' + 2y = e^t \sin^2 \frac{t}{2}.$$

2003

28. Решити једначину

$$xu'_x + (z+u)u'_y + (y+u)u'_z = y + z.$$

29. Израчунати $\displaystyle\int_{C^-} \frac{e^z dz}{1+e^{\pi z}}$ ако је $C = \{z \mid |z| = \pi\}$.

30. Применом Лапласове трансформације одредити опште решење једначине

$$y'' + 2y' + 2y = 2e^{-t}(\sin t + \cos t).$$

2003

31. Одредити решење једначине

$$x\sqrt{y}u'_x - 2(xy + 2y\sqrt{y})u'_y + xu'_z = 0$$

за које је $u(1, y, z) = \sqrt{y}(1 + 3e^z)$.

32. Одредити све аналитичке функције $f : x + iy \mapsto u + iv$ за које је

$$u(x, y) = e^{-y}\cos x - e^x \sin y.$$

33. Применом Лапласове трансформације решити једдначину

$$y''' - y'' + 2y = 2$$

ако је $y(0) = 6$, $y'(0) = -2$ и $y''(0) = 1$.

2003

34. Одредити решење једначине

$$x^2 z'_x + (yx - z)z'_y = xz$$

које за $x = 1$ постаје $y = z^2$.

35. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{dz}{(z+i)^2 \sin z}$ ако је C контура на којој нису тачке 0 и $-i$.

36. Применом Лапласове трансформације решити систем

$$x' = -x - 5y$$
$$y' = x + y + 4t$$

ако је $x(0) = -1$ и $y(0) = 2$.

2004

37. Решити једначину $xz'_x + yz'_y = z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

38. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{e^{2iz} - 1}{z^3} dz$, где је $C = \{z \mid |z| < 1\}$.

39. Применом Лапласове трансформације одредити решење једначине

$$y'' + 16y = f(t), \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1,$$

где је $F(t) = \cos 4t$ за $0 \le t < \pi$ и $f(t) = 0$ за $t \ge \pi$.

2004

40. Одредити решење једначине

$$(z + xy)u'_x + (y^2 - 1)u'_y + (x + yz)u'_z = 0$$

за које је $u(0, y, z) = y/z$.

41. Израчунати $\displaystyle\int_{c^+} \frac{dz}{(z-i)^2 \sin z}$ ако је $C = \{z \mid |z - i| = 2\}$.

42. Применом Лапласове трансформације одредити решење једначине

$$y'' - 4y' + 4y = 25e^t \sin 2t, \quad y(0) = 5, \ y'(0) = 1.$$

2004

43. Одредити решење једначине

$$(x^2 + y^2 - yz)u'_x + (xz - x^2 - y^2)u'_y + (xz - yz)u'_z = 0$$

за које је $u(0, y, z) = y + z$.

44. Одредити све аналитичке функције $f : x + iy \mapsto u + iv$ за које је

$$v(x, y) = e^{2x}((x - 1)\sin 2y + y\cos 2y).$$

45. Применом Лапласове трансформације решити систем

$$y' - x = 0, \quad x'' + 4y' = e^{2t}, \quad x(0) = x'(0) = y(0) = 0.$$

2004

46. Решити једначину

$$2y(2 - x)z'_x + (x^2 + z^2 - y^2 - 4x)z'_y + 2yz = 0.$$

47. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{dz}{1 + z^4}$ ако је $C = \{z \mid |z - 1| = 1\}$.

48. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y' - \int_0^t y(x)dx = \frac{1}{2}tf(t),$$

где је $f(t) = 0$ за $0 < t < 3$ и $f(t) = 2$ за $t \geq 3$.

2005

49. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$x(y^4 + z^4)z'_x + y(z^4 + x^4)z'_y = z(y^4 - x^4).$$

50. Одредити аналитичку функцију $f : x + iy \mapsto u + iv$ ако је

$$v(x, y) = \frac{-2x}{x^2 + y^2 + 2y + 1}$$

и $f(0) = -1$, а затим израчунати $\displaystyle\int_{C^+} f(z)dz$, где је $C = \{x \mid |z| = \pi\}$.

51. Применом Лапласове трансформације одредити опште решење једначине $y'' + y = f(t)$ ако је $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi, \\ 0, & t > \pi. \end{cases}$.

2005

52. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(2x - y + z)z'_x + (z + x)z'_y = z.$$

53. Одредити аналитичку функцију $f : x + iy \mapsto u + iv$ ако је

$$u(x, y) = \frac{3x}{x^2 + y^2 - 4y + 4}$$

и $f(0) = i$, а затим израчунати $\displaystyle\int_{C^+} f(z)dz$, где је $C = \{x \mid |z| = \pi\}$.

54. Одредити инверзну Лапласову слику за функцију $F : s \mapsto \dfrac{(s+2)^2}{(s^2 + 4s + 5)^3}$.

2005

55. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(x^2y - xz)z'_x + (y^2x + yz)z'_y = z.$$

56. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{\sin 2z}{(z^3 + z)^2} dz$ ако је $C = \{z \mid |z| = 2\}$.

57. Одредити Лапласову слику функције $f : t \mapsto \dfrac{\sinh^3 t}{t}$.

2005

58. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$\ln z \cdot (x + y)u'_x + \ln z \cdot (x - y)u'_y = (y^2 - 2xy - x^2)u'_z = 0.$$

59. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{e^z dz}{z^2(z^2 - (a + 1/a)z + 1)}$ ако је $0 < |a| \neq 1$ и $C = \{z \mid |z| = 1\}$.

60. Применом Лапласове трансформације одредити опште решење једначине

$$\int_0^t (y''(x) + 8y'(x) + 20y(x))dx = 10t^2.$$

2006

61. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(x^2 + z^2)u'_x + (x + z)u'_y + 2xzu'_z = 0.$$

62. Испитати диференцијабилност функције $z \mapsto \cosh \overline{z}$.

63. Применом Лапласове трансформације одредити решење једначине

$$4y' - 5y + 65\sin 2t = \int_0^t (y''(x) + y'(x))\cos(t - x)dx$$

које задовољава услов $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

2006

64. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(x + y - xy^2)z'_x + (x - y - x^2y)z'_y = x^2 + y^2.$$

65. Израчунати $\displaystyle\int_{C^-} \frac{dz}{(z^3 + z)\sin z}$ ако је $C = \{z \mid |z - i|^2 = 2\}$.

66. Одредити Лапласову слику функције $f : t \mapsto t\sinh^3 t$.

2006

67. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(x + y)u'_x + (x - y)u'_y + 2yu'_z = 0.$$

68. Израчунати $\displaystyle\int_{C^-} \frac{\cos z}{1 + e^z}dz$ ако је $C = \{z \mid |z| = 4\}$.

69. Применом Лапласове трансформације одредити решење једначине

$$y'' + 4y' + 4y = u(t - 2)$$

које задовољава услов $y(0) = y'(0) = 2$.

2006

70. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(x^2 + y^2)u'_x + 2xyu'_y + (x + y)u'_z = 0.$$

71. Испитати диференцијабилност функције $z \mapsto \overline{\cosh z}$.

72. Применом Лапласове трансформације одредити решење једначине

$$4y' - 5y + 65\sin 2t = \int_0^t (y''(t-x) + y'(t-x))\cos x dx$$

које задовољава услов $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

2006

73. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(-x + y - xy)z'_x + (x + y - x^2y)z'_y = x^2 + y^2.$$

74. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{dz}{(z^3+z)\sin z}$ ако је $C = \{z \mid |z-i|^2 = 2\}$.

75. Одредити Лапласову слику функције $f : t \mapsto t\cosh^3 t$.

2006

76. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(x+z)u'_x + 2zu'_y + (x-z)u'_z = 0.$$

77. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{\cos z}{1+e^z} dz$ ако је $C = \{z \mid |z| = 4\}$.

78. Применом Лапласове трансформације одредити решење једначине

$$y'' + 4y' + 4y = u(t-1)$$

које задовољава услов $y(0) = y'(0) = 3$.

2007

79. Матричном методом решити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} x' &= x + y - z \\ y' &= -x + 3y - z \\ z' &= -x + y + z. \end{aligned}$$

80. Израчунати $\displaystyle\int_{C^-} \frac{2\cos\frac{\pi z}{2} dz}{z^2(2z^2+5z+2)}$ ако је $C = \{z \mid |z| = 1\}$.

81. Применом Лапласове трансформације одредити опште решење једначине

$$y'' + y = f(t)$$

ако је $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1. \end{cases}$.

2007

82. Матричном методом решити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} x' &= x + y + 2z \\ y' &= -x + 3y + 2z \\ z' &= x - 2y. \end{aligned}$$

83. Одредити аналитичку функције $f : x + iy \mapsto u + iv$ (за $x + iy \neq -2$) ако је

$$u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2 + 4x + 4}$$

и ако је $f(0) = i$.

84. Применом Лапласове трансформације одредити опште решење једначине

$$\int_0^t y''(x)\cos(t - x)dx = t^2.$$

2007

85. Матричном методом решити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y - z \\ y' &= x + y \\ z' &= 2x - y + 2z. \end{aligned}$$

86. Израчунати $\displaystyle\int_{C+} \frac{z^2 + 1}{z^2(1 - \overline{z})(4 - \overline{z})} dz$ ако је $C = \{z \mid |z| = 2\}$.

87. Применом Лапласове трансформације решити систем једначина

$$\begin{aligned} x'' + 3x - 4y &= 3 \\ y'' - y + x &= 1 \end{aligned}$$

ако је $x(0) = x'(0) = 0$ и $y(0) = y'(0) = 0$.

2008

88. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(x^2 - 2y^2 - 3z^2)z'_x + 3xyz'_y = 4xz.$$

89. Одредити аналитичку функцијеу $f : x + iy \mapsto u + iv$ (за $x + iy \neq -1$) ако је

$$v(x, y) = \frac{x + 1}{x^2 + y^2 + 2x + 1}$$

и ако је $f(0) = 0$.

90. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'' - 2y' + 7y - 10\cos t = \int_0^t y'''(x)(t - x)^2 dx$$

ако је $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

2008

91. Решити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} x' &= x - 5y \\ y' &= x + 3y + 4\sin 2x. \end{aligned}$$

92. Израчунати $\displaystyle\int_{C^-} \frac{z + 1}{e^z + 1} dz$ ако је $C = \{z \mid |z| = 4\}$.

93. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y''' + y' = f(t)$$

ако је $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 5 \\ 0, & t \geq 5 \end{cases}$ и ако је $y(0) = y'(0) = 0$ и $y''(0) = 1$.

2008

94. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$y(x^2 - z^2)z'_x - x(z^2 + y^2)z'_y = z(x^2 + y^2).$$

95. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{9e^z dz}{z^2(z^2 + 9)}$ ако је $C = \{z \mid |z + 2i| = 3\}$.

96. Применом Лапласове трансформације решити систем једначина

$$\begin{aligned} x'' + x' + y'' - y &= 4e^t \\ x' + 2x - y' + y &= 4e^{-t} \end{aligned}$$

ако је $x(0) = y(0) = y'(0) = 0$ и $x'(0) = 1$.

2009

97. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(x-1)u'_x + (2y+z)u'_y + (y+2z)u'_z = 0.$$

98. Одредити аналитичку функцију $f : x+iy \mapsto u+iv$ ако је

$$u(x,y) = \sin y \cdot \cosh x$$

и ако је $f(0) = i$.

99. Применом Лапласове трансформације решити систем

$$\begin{aligned} x' &= 2x + 4y + \cos t \\ y' &= -x - 2y + \sin t \end{aligned}$$

ако је $x(0) = -1$ и $y0) = 2$.

2009

100. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(-x+y-xy^2)z'_x + (x+y-x^2y)z'_y = x^2 + y^2.$$

101. Израчунати $\displaystyle\int_{C^-} \frac{\cos z dz}{z(z+i)^2}$ ако је $C = \{z \mid |z| = 2\}$.

102. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'(t) + 3\int_0^t y(x)\cos(t-x)dx = 2\sin t$$

ако је $y(0) = 0$.

2010

103. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(x^2+z^2)z'_x + (x-z)^3 z'_y = 2xz.$$

104. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{\tan z}{z^3} dz$ ако је $C = \{z \mid |z+1| = \sqrt{2}\}$.

105. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y''' - y' = 10e^{-t}\cos t$$

ако је $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ и $y''(0) = 1$.

2010

106. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(y^2 + z^2)u'_x + (z - xy - yz^2)u'_y + (y + xz - y^2 z)u'_z = 0.$$

107. Одредити аналитичку функцију $f : x + iy \mapsto u + iv$ ако је $f(0) = -1/2$ и

$$v(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2 - 4x + 4}$$

за $(x, y) \neq (0, 2)$.

108. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'(t) + y(t) + \int_0^t e^{x-t} y(x)dx = \sin t$$

ако је $y(0) = 1$.

2011

109. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(-x^2 + xz^2)z'_x + (xy - yz^2 - 2z^2)z'_y = xz.$$

110. Одредити све аналитичке функције $f : x + iy \mapsto u + iv$ ако је

$$v(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2 + 2y + 1}.$$

111. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'' + \int_0^t (y''(x) + y(x)) \sin(t - x)dx = 2\cos t$$

ако је $y(0) = 0$ и $y'(0) = -2$.

2011

112. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(xz + yz + 2y)z'_x + (3z - 2y)z'_y = z.$$

113. Израчунати $\displaystyle\int_{C^-} \frac{\sinh z dz}{(z^2 + iz)^2}$ ако је $C = \{z \mid |z + i| = \sqrt{2}\}$.

114. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-t}(t + 2\sin t)$$

ако је $y(0) = 1$ и $y'(0) = 2$.

2012

115. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$xyu'_x + \sqrt{y^2 - 1}u'_y + y(x^2 - z)u'_z = 0.$$

116. Одредити све аналитичке функције $f : x + iy \mapsto u + iv$ ако је

$$v(x, y) = y \sin x \cosh y + x \cos x \sinh y.$$

117. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'' + 2y' + 5y = 4te^{-t}$$

ако је $y(0) = y'(0) = 2$.

2012

118. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$z(x + y)z'_x + z(x - y)z'_y = y^2 - 2xy - x^2.$$

119. Израчунати $\displaystyle\int_{C^-} \frac{dz}{z^5 - 2z^4 + 2z^3}$ ако је $C = \{z \mid |z - i| = \sqrt{2}\}$.

120. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'' = e^{2t} - \int_0^t y'(x)e^{2t-2x}dx$$

ако је $y(0) = 1$ и $y'(0) = -1$.

2013

121. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$xz'_x + y(xyz - 1)z'_y = e^z.$$

122. Израчунати $\displaystyle\int_{c^+} \frac{\sin\frac{\pi}{6}z}{(z^2 - 3z)^2}$ ако је $C = \{z \mid |z - 3/2| = 2\}$.

123. Применом Лапласове трансформације решити систем

$$x' = -2x + y + 3\sin t$$
$$y' = 4x - 2y$$

ако је $x(0) = y(0) = 17$.

2013

124. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$x(\sqrt{y} + \sqrt{z})u'_x + y(\sqrt{z} + \sqrt{x})u'_y + z(\sqrt{y} - \sqrt{x})u'_z = 0.$$

125. Одредити све аналитичке функције $f : x + iy \mapsto u + iv$ ако је

$$v(x, y) = -(x - 1)\sin x \sinh y + y \cos x \cosh y.$$

126. Применом Лапласове трансформације решити систем

$$x' = 5x - 3y + te^{2t}$$
$$y' = 3x - y + e^{3t}$$

ако је $x(0) = 1$ и $y(0) = -1$.

2014

127. Решити систем диференцијалних једначине

$$x' = \frac{y}{t} - 1, \quad y' = \frac{2x - y}{t} - 1.$$

128. Одредити све аналитичке функције $f : x + iy \mapsto u + iv$ ако је

$$u(x, y) = e^{-y}(x \cos x - y \sin x).$$

129. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y''' + y' = 2e^{2t}$$

ако је $y(0) = y'(0) = 2$ и $y''(0) = -2$.

2014

130. Решити систем диференцијалних једначина

$$x' = -\frac{x}{x + t}, \quad y' = \frac{y(1 - 2x - 2t)}{x + t}.$$

131. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{e^{\pi z}}{(z^3 + 4z)\sin z}dz$ ако је $C = \{z \mid |z + i| = \sqrt{2}\}$.

132. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'' - 3y'' + 3y' - y = e^t + 1$$

ако је $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ и $y''(0) = 4$.

2016

133. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} x' &= x - 3y + 6z \\ y' &= 3x - 5y + 6z \\ z' &= 3x - 3y + 4z. \end{aligned}$$

134. Израчунати $\int_{C^-} \overline{z}(|z+1| + Re(z))dz$ ако је крива C граница области $D = \{z \mid Re(z) < 0,\ |z| < 1\}$.

135. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 25t$$

ако је $y(0) = 1$ и $y'(0) = 2$.

2016

136. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} x' &= -5x + 3y + 6z \\ y' &= 2x - 3y - 2z \\ z' &= -4x + 3y + 4z. \end{aligned}$$

137. Израчунати $\int_{C^-} \frac{\sin z}{z^2 \cos z} dz$ ако је $C = \{z \mid |z| = 2\}$.

138. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'''(t) + 4y'(t) = g(t)$$

ако је $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = -4$ и $g(t) = \begin{cases} 12, & 0 \le t < 1 \\ 0, & 1 \le t. \end{cases}$

РЕЗУЛТАТИ/УПУТСТВА/РЕШЕЊА

25. Из придруженог система

$$\frac{dx}{2xy}=\frac{dy}{-x^2+y^2-z^2}=\frac{dz}{2yz}$$

имамо једнакости

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z},\qquad \frac{xdx+ydy+zdz}{yx^2+y^3+yz^2}=\frac{dz}{2yz}$$

из којих добијамо прве интеграле $\varphi=C_1$ и $\psi=C_2$, где је

$$\varphi(x,y,z)=\frac{x}{z}\qquad \psi(x,y,z)=\frac{x^2+y^2+z^2}{z}.$$

Пошто је

$$\begin{vmatrix}\varphi'_x & \varphi'_y\\ \psi'_x & \psi'_y\end{vmatrix}=\frac{2y}{z^2}\neq 10$$

за $yz\neq 0$, први интеграли су независни, па је опште решење дате једначине

$$u(x,y,z)=F\left(\frac{x}{z},\frac{x^2+y^2+z^2}{z}\right),$$

где је F диференцијабилна функција две променљиве.

26. Ако је $z=x+iy$, тада је

$$f(z)=(x-iy)e^{x+iy}=e^x(x\cos y+y\sin y)+i\cdot e^x(x\sin y-y\cos y)=u+iv.$$

Налажењем парцијалних извода функција u и v добијамо да је

$$u'_x=e^x(x\cos y+\cos y+y\sin y),\qquad u'_y=e^x(-x\sin y+\sin y+y\cos y),$$

$$v'_x=e^x(x\sin y+\sin y-y\cos y),\qquad v'_y=e^x(x\cos y-\cos y+y\sin y).$$

Из Коши Риманових услова $u'_x=v'_y$ и $u'_y=-v'_x$ следи да је $\cos y=0$ и $\sin y=0$, што није могуће.

Према томе, функција f није диференцијабилна у $\mathbb{C}$.

27. За $L[y]=Y$ и за $y(0)=A$ и $y'(0)=B$ имамо $y'\xrightarrow{L}sY-A$ и $y''\xrightarrow{L}s^2Y-sA-B$. Како важи

$$\sin^2\frac{t}{2}\xrightarrow{L}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right),\qquad e^t\sin^2\frac{t}{2}\xrightarrow{L}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{s-1}{(s-1)^2+1}\right),$$

из дате једначине налазимо да је

$$Y(s)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(s-1)[(s-1)^2+1]}-\frac{1}{2}\cdot\frac{s-1}{[(s-1)^2+1]^2}+\frac{sA+B}{(s-1)^2+1}.$$

Пошто
$$\frac{1}{s(s^2+1})=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\xrightarrow{L^{-1}}1-\cos t,\qquad \frac{2s}{(s^2+1)^2}\xrightarrow{L^{-1}}t\sin t,$$
то је
$$y(t)=\frac{1}{2}(1-\cos t)e^t-\frac{1}{4}t\sin te^t+(A\cos t+(A+B)\sin t)e^t$$
или
$$y(t)=\left(C_1\cos t+C_2\sin t+\frac{1}{2}-\frac{t}{4}\sin t\right)e^t.$$

28. Из придруженог система
$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{z+u}=\frac{dz}{y+u}=\frac{du}{y+z}$$
имамо једнакости
$$\frac{dx}{x}=-\frac{d(y-z)}{y-z},\qquad \frac{dx}{x}=-\frac{d(y-u)}{y-u},\qquad \frac{dx}{x}=\frac{d(y+z+u)}{2(y+z+u)}$$
из којих добијамо прве интеграле $\alpha=C_1$, $\beta=C_2$ и $\gamma=C_3$, где је
$$\alpha(x,y,z,u)=x(y-z),\qquad \beta(x,y,z,u)=x(y-u),\qquad \gamma(x,y,z,u)=\frac{y+z+u}{x^2}.$$
Како је
$$\begin{vmatrix}\alpha'_y & \beta'_y & \gamma'_y\\ \alpha'_z & \beta'_z & \gamma'_z\\ \alpha'_u & \beta'_u & \gamma'_u\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & x & 1/x^2\\ -x & 0 & 1/x^2\\ 0 & -x & 1/x^2\end{vmatrix}=3\neq 0,$$
опште решење дате једначине дато је имплицитно једнакошћу
$$F\left(x(y-z),x(y-u),\frac{y+z+u}{x^2}\right)=0,$$
где је F диференцијабилна функција три променљиве.

29. Из једнакости $1+e^{\pi z}=0$ имамо да је $\pi z=Ln(-1)=(\pi+2k\pi)i$, што значи да су тачке $z_k=(2k+1)i$ (где је $k\in\mathbb{Z}$) сингуларитети подинтегралне функције у датом интегралу. Области коју затвара контура C припадају тачке z_0, z_1, z_{-1} и z_{-2}, па је
$$I=2\pi i(\operatorname*{res}_{z=i}f(z)+\operatorname*{res}_{z=3i}f(z)+\operatorname*{res}_{z=-i}f(z)+\operatorname*{res}_{z=-3i}f(z)).$$
За $z=i$ налазимо да је
$$\operatorname*{res}_{z=i}f(z)=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^z}{1+e^{z\pi}}\overset{LP}{=}\lim_{z=i}\frac{e^z+(z-i)e^z}{\pi e^{z\pi}}=-\frac{e^i}{\pi}.$$

Слично добијамо да је

$$\operatorname*{res}_{z=3i} f(z) = -\frac{e^{3i}}{\pi}, \quad \operatorname*{res}_{z=-i} f(z) = -\frac{e^{-i}}{\pi}, \quad \operatorname*{res}_{z=-3i} f(z) = -\frac{e^{-3i}}{\pi}.$$

Према томе,

$$I = -2i\left(e^{i} + e^{-i} + e^{3i} + e^{-3i}\right) = -4i(\cos 1 + \cos 3).$$

30. За $L[y] = Y$ и за $y(0) = A$ и $y'(0) = B$ имамо $y' \xrightarrow{L} sY - A$ и $y'' \xrightarrow{L} s^2Y - sA - B$. Применом Лапласове трансформације из дате једначине добијамо

$$Y(s) = \frac{(s+1)A + A + B}{(s+1)^2 + 1} + \frac{2}{[(s+1)^2+1]^2} + \frac{2(s+1)}{[(s+1)^2+1]^2}.$$

Пошто је $\dfrac{1}{(s^2+1)^2} \xrightarrow{L^{-1}} \dfrac{1}{2}\sin t - \dfrac{1}{2}t\cos t$, то је

$$y(t) = (A\cos t + (A+B+1)\sin t + t\sin t - t\cos t)e^{-t}$$

или

$$y(t) = (C_1\cos t + C_2\sin t + t\sin t - t\cos t)e^{-t}.$$

31. Из придруженог система

$$\frac{dx}{x\sqrt{y}} = \frac{dy}{-2(xy + 2y\sqrt{y}} = \frac{dz}{x}$$

имамо Бернулијеву диференцијалну једначину

$$y' + 4\frac{y}{x} = -2\sqrt{y}$$

из које добијамо први интеграл

$$x^2\sqrt{y} + \frac{x^3}{3} = C_1.$$

Ако у једнакости $\dfrac{dx}{\sqrt{y}} = \dfrac{dz}{x}$ заменимо $\sqrt{y}$ са $\dfrac{C_1}{x^2} - \dfrac{x}{3}$, добијамо диференцијалну једначину из које налазимо други први интеграл

$$z + \ln(3x^2\sqrt{y}) = C_2.$$

Опште решење дате једначине је

$$u = F\left(x^2\sqrt{y} + \frac{x^3}{3}, z + \ln(3x^2\sqrt{y})\right).$$

Сада треба одредити партикуларно решење. За $x = 1$ имамо да је $C_1 = \sqrt{y} + \frac{1}{3}$ и $z = C_2 - \ln(3C_1 - 1)$, па из датог услова следи да је

$$u(1, y, z) = \left(C_1 - \frac{1}{3}\right)\left(3e^{C_2} \cdot \frac{1}{3C_1 - 1} + 1\right) = e^{C_2} + C_1 - \frac{1}{3}.$$

Према томе, тражено партикуларно решење је

$$u(x, y, z) = 3e^z x^2 \sqrt{y} + x^2\sqrt{y} + \frac{1}{3}(x^3 - 1).$$

32. Диференцирањем функције u налазимо да је

$$u'_x = -e^{-y}\sin x - e^x \sin y, \quad u'_y = -e^{-y}\cos x - e^x \cos y.$$

Из Коши Римановог услова $v'_y = u'_x$ добијамо да је

$$v = -\sin x \int e^{-y} dy - e^x \int \sin y dy = e^{-y}\sin x + e^x \cos y + \varphi(x).$$

Ако сада v диференцирамо по x имамо да је

$$v'_x = e^{-y}\cos x + e^x \cos y + \varphi'(x).$$

Ако израз на десној страни изједначимо са изразом за $-u'_y$ (друга Коши Риманова једнакост), добијамо да је $\varphi'(x) = 0$, што значи да је $\varphi(x) = C$.

Према томе,

$$v(x, y) = e^{-y}\sin x + e^x \cos y + C,$$

а за функцију f имамо да је

$$f(z) = u + iv = e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^x(-\sin y + i\cos y) + iC = e^{iz} + ie^z + iC.$$

33. Ако је $L[y] = Y$, тада применом Лапласове трансформације из дате једначине добијамо да је

$$s^3 Y - 6s^2 + 2s - 1 - s^2 Y + 6s - 2 + 2Y = \frac{2}{s}.$$

Из ове једнакости имамо да је

$$Y(s) = \frac{6s^3 - 8s^2 + 3s + 2}{s(s+1)(s^2 - 2s + 2)} = \frac{1}{s} + \frac{3}{s+1} + \frac{2s - 3}{s^2 - 2s + 2}.$$

Инверзном Лапласовом трансформацијом налазимо да је

$$y(t) = 1 + 3e^{-t} + 2e^t \cos t - e^t \sin t.$$

34. Придружени систем је

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{yx-z}=\frac{dz}{xz}.$$

Из једнакости $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dz}{z}$ имамо први интеграл $\dfrac{x}{z}=C_1$. Ако у првој једнакости придруженог система заменимо z са x/C_1, добијамо диференцијалну једначину

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y-1/C_1}$$

из које налазимо други први интеграл $\dfrac{x^2}{yz-z}=C_2$.

Опште решење дате једначине је дато имплицитно једнакошћу

$$F\left(\frac{x}{z},\frac{x^2}{yz-z}\right)=0.$$

Одредимо сада дато партикуларно решење. За $x=1$ из првих интеграла следи да је $z=\dfrac{1}{C_1}$ и $y=\dfrac{1}{C_2}+\dfrac{1}{C_1}$. Из датог услова $y=z^2$ следи да је $C_1^2+C_1C_2=C_2$. Према томе, тражено партикуларно решење је дефинисано једнакошћу

$$\frac{x^2}{z^2}+\frac{x}{z}\cdot\frac{x^2}{yx-z}=\frac{x^2}{yx-z},$$

односно једнакошћу

$$x(y+z)-z=z^2.$$

35. За подинтегралну функцију f датог интеграла I тачка $z=0$ је пол првог реда, а тачка $z=-i$ је пол другог реда, па је

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z}{(z+i)^2\sin z}=\frac{1}{i^2}=-1,$$

$$\operatorname*{res}_{z=-i} f(z)=\lim_{z\to -i}\left(\frac{1}{\sin z}\right)'\overset{LP}{=}\lim_{z\to -i}\frac{-\cos z}{\sin^2 z}=\frac{-\cos(-i)}{\sin^2(-i)}=-\frac{1}{2}\frac{e^{-1}+e}{e^{-2}+e^2-2}.$$

Вредност интеграла I зависи од тога да ли сингуларне тачке припадају области D. Ако тачке $z=0$ и $z=-i$ не припадају области D коју затвара контура C, онда је $I=0$, а ако обе припадају области D, онда је

$$I=-2\pi i-\pi i\frac{e^{-1}+e}{e^{-2}+e^2-2}.$$

У случају да тачка $z=0$ припада, а тачка $z=-i$ не припада области D, имамо да је $I=-2\pi i$. Слично, ако тачка $z=-i$ припада, а тачка $z=0$ не пирпада области D, тада је $I=-\pi i\dfrac{e^{-1}+e}{e^{-2}+e^2-2}$.

36. Ако је $L[x] = X$ и $L[y] = Y$, тада применом Лапласове трансформације из датог система добијамо алгебарски систем по X и Y,

$$sX + 1 = -X - 5Y, \quad sY - 2 = X + Y + \frac{4}{s^2}.$$

Решавањем овог система Крамеровим правилом налазимо да је

$$D = \begin{vmatrix} s+1 & 5 \\ -1 & s-1 \end{vmatrix} = s^2 + 4, \quad D_X = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 + 4/s^2 & s-1 \end{vmatrix} = \frac{-s^3 + 11s^2 + 20}{s^2},$$

$$D_Y = \begin{vmatrix} s+1 & -1 \\ -1 & 2 + 4/s^2 \end{vmatrix} = \frac{2s^3 + s^2 + 4s + 4}{s^2}, \quad X = \frac{D_X}{D}, \ Y = \frac{D_Y}{D}.$$

Како је

$$X = \frac{-s^3 + 11s^2 + 20}{s^2(s^2+4)} = \frac{5}{s^2} + \frac{-s+6}{s^2+4},$$

инверзном Лапласовом трансформацијом добијамо да је

$$x(t) = 5t - \cos 2t + 3\sin 2t.$$

Слично, из

$$Y = \frac{2s^3 + s^2 + 4s + 4}{s^2(s^2+4)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+4}$$

добијамо да је

$$y(t) = 1 + t + \cos 2t.$$

37. Из прве једнакости придруженог система

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

имамо један први интеграл $\dfrac{x}{y} = C_1$.

Ако у другој једнакости придруженог система заменимо x са $C_1 y$, добијамо диференцијалну једначину

$$\frac{dz}{dy} = \frac{z}{y} + \frac{\sqrt{C_1^2 y^2 + y^2 + z^2}}{y}.$$

Сменом $z/y = u$ једначина постаје $u'y = \sqrt{C_1^2 + 1 + u^2}$, односно

$$\frac{du}{\sqrt{C_1^2 + 1 + u^2}} = \frac{dy}{y}.$$

Решавањем ове једначине налазимо други први интеграл

$$\frac{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{y^2} = C_2.$$

Опште решење дате једначине је

$$z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = y^2 F\left(\frac{x}{y}\right),$$

где је F диференцијабилна функција.

Напомена. Други први интеграл може да се добије и из следеће једнакости

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{x^2 + y^2 + z^2 + z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{dz}{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

јер из ње следи да је

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = dz.$$

Према томе, $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - z = C_3$, а веза између првих интеграла је $C_1^2 + 1 = C_2 C_3$.

38. Како $z^2 f(z) \to 2i$ када $z \to 0$, тачка $z = 0$ је пол другог реда, па је

$$\begin{aligned}
\operatorname*{res}_{z=0} f(z) &= \lim_{z\to 0} \left(\frac{e^{2iz} - 1}{z}\right)' \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{2ie^{2iz} z - (e^{2iz} - 1)}{z^2} \\
&\overset{LP}{=} \lim_{z\to 0} \frac{2i \cdot 2ie^{2iz} z}{2z} \\
&= -2.
\end{aligned}$$

Према томе, $I = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = -4\pi i$.

39. Како је

$$\begin{aligned}
f(t) &= \cos 4t - \cos 4t \cdot u(t - \pi) \\
&= \cos 4t - \cos(4t - 4\pi) \cdot u(t - \pi) \\
&= \cos 4t - \cos 4(t - \pi) \cdot u(t - \pi),
\end{aligned}$$

имамо $f \xrightarrow{L} \dfrac{s}{s^2 + 16} - e^{-\pi s} \dfrac{s}{s^2 + 16}$.

Ако $y \xrightarrow{L} Y$, тада $y'' \xrightarrow{L} s^2 Y - 1$, па применом Лапласове трансформације из дате једначине добијамо да је

$$Y(s^2 + 6) = \left(1 - e^{-\pi s}\right) \frac{s}{s^2 + 16}.$$

Из ове једнакости следи да је

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 16} + \frac{s}{(s^2 + 16)^2} \left(1 - e^{-\pi s}\right).$$

Пошто важи

$$\frac{s}{(s^2+16)^2} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{1}{8}t\sin 4t,$$

то је

$$y(t) = \frac{1}{4}\sin 4t + \frac{1}{8}t\sin 4t - \frac{1}{8}(t-\pi)\sin(4(t-\pi))u(t-\pi).$$

40. Из једнакости

$$\frac{d(x+z)}{(x+z)(y+1)} = \frac{dy}{(y+1)(y-1)}, \qquad \frac{d(x-z)}{(x-z)(y-1)} = \frac{dy}{(y+1)(y-1)}$$

добијамо прве интеграле

$$\frac{x+z}{y-1} = C_1, \qquad \frac{x-z}{y+1} = C_2.$$

За $x=0$ имамо да је

$$y = \frac{C_1-C_2}{C_1+C_2}, \qquad z = -\frac{2C_1C_2}{C_1+C_2},$$

па је

$$u = \frac{y}{z} = \frac{C_1-C_2}{-2C_1C_2} = \frac{(x+z)(y+1)-(x-z)(y-1)}{-2(x+z)(x-z)}.$$

41. Сингуларитети интегранда f датог интеграла I су тачке $z=0$ (пол првог реда) и $z=i$ (пол другог реда). Према томе, $I = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{res}_{z=i} f(z)\right)$, где је

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z=0}\frac{z}{(z-i)^2\sin z} = -1,$$

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i}\left(\frac{1}{\sin z}\right)' = \frac{-\cos i}{\sin^2 i} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-1}+e^1}{(e^{-1}-e^1)^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{e+e^3}{1+e^4-2e^2}.$$

42. Ако је $Y = L[y]$, тада применом Лапласове трансформације добијамо да је

$$Y(s) = \frac{5s^3-29s^2+63s-45}{s^2-2s+5} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{Cs+D}{s^2-2s+5},$$

где је $A=B=D=1$ и $C=4$.

Решење дате једначине је

$$y(t) = Ae^{2t} + Bte^{2t} + Ce^t\sin 2t + (D-C)e^t\cos 2t.$$

43. Из једнакости $\dfrac{d(x+y)}{-yz+xz} = \dfrac{dz}{(x-y)z}$ добијамо први интеграл $x+y-z=C_1$, а из једнакости
$$\frac{xdx+ydy}{(x-y)(x^2+y^2)} = \frac{dz}{(x-y)z}$$
добијамо други први интеграл $x^2+y^2-z^2=C_2$.

44. Из Коши Риманових услова имамо да је
$$v'_x = e^{2x}\left((2x-1)\sin 2y + 2y\cos 2y\right) = -u'_y,$$
$$v'_y = e^{2x}\left((2x-1)\cos 2y - 2y\sin 2y\right) = u'_x.$$
Из друге једнакости следи да је
$$u = \int u'_x dx = \cos 2y(x-1)e^{2x} - e^{2x}y\sin 2y + \varphi(y).$$
Диференцирањем последњег израза по y и изједначавањем са изразом за u'_y из прве једнакости добијамо да је $\varphi'(y)=0$, што значи да је $\varphi(y)=C$.

Према томе,
$$u(x,y) = e^{2x}\left((x-1)\cos 2y - y\sin 2y\right) + C.$$

45. Нека је $L[x]=X$ и $L[y]=Y$. Применом Лапласове трансформације на дати систем добијамо да је
$$X(s) = \frac{1}{(s-2)(s^2+4)}, \qquad Y(s) = \frac{1}{s(s-2)(s^2+4)},$$
а инверзном Лапласовом трансформацијом налазимо да је
$$x(t) = A_1e^{-2t} + B_1\cos 2t + \frac{C_1}{2}\sin 2A,$$
$$y(t) = A_2 + B_2e^{-2t} + C_2\cos 2t + \frac{D_2}{2}\sin 2A.$$

46. Из придруженог система
$$\frac{dx}{2y(2-x)} = \frac{dy}{x^2+z^2-y^2-4x} = \frac{dz}{-2yz}$$
следе једнакости
$$\frac{dx}{2-x} = -\frac{dz}{z}, \qquad \frac{xdx+ydy+zdz}{-y(x^2+y^2+z^2)} = \frac{dz}{-2yz}.$$

Из ових једнакости лако добијамо прве интеграле

$$\frac{x-2}{z} = C_1, \qquad \frac{x^2+y^2+z^2}{z} = C_2$$

који су независни јер за $\varphi = \dfrac{x-2}{z}$ и $\psi = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{z}$ и $yz \neq 0$ важи

$$\begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y \\ \psi'_x & \psi'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/z & 0 \\ 2x/z & 2y/z \end{vmatrix} = \frac{2y}{z} \neq 0.$$

Према томе, опште решење дате једначине је дато имплицитно једнакошћу

$$F\left(\frac{x-2}{z}, \frac{x^2+y^2+z^2}{z}\right) = 0,$$

где је F диференцијабилна функција две променљиве.

47. Сингуларитети интегранда f датог интеграла I су тачке

$$z_1 = e^{\pi i/4}, \quad z_2 = e^{3\pi i/4}, \quad z_3 = e^{-\pi i/4}, \quad z_4 = e^{-3\pi i/4}.$$

Како области коју затвара контура C припадају само тачке z_1 и z_4, то је

$$I = 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=z_4} f(z)\right).$$

Из једнаккости $1+z^4 = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$ следи да је

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)}, \qquad \operatorname*{res}_{z=z_4} f(z) = \frac{1}{(z_4-z_1)(z_4-z_2)(z_4-z_3)}.$$

Израчунавањем разлика између сингуларитета,

$$z_1 - z_2 = e^{\frac{\pi}{4}i} - e^{\frac{3\pi}{4}i} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4} = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2},$$

$z_1 - z_3 = (1+i)\sqrt{2}, \quad z_1 - z_4 = \sqrt{2}i, \quad z_4 - z_1 = -\sqrt{2}i, \quad z_4 - z_2 = (1-i)\sqrt{2}, \quad z_4 - z_3 = \sqrt{2}$

добијамо да је $I = 2\pi i \cdot \dfrac{-1}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}i.$

Напомена. Пошто су сингуларне тачке полови првог реда, наведене резидуме можемо да израчунамо и на следећи начин

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \left.\frac{1}{(1+z^4)'}\right|_{z=z_1} = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi}{4}i},$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_4} f(z) = \left.\frac{1}{(1+z^4)'}\right|_{z=z_4} = \frac{1}{4z_4^3} = \frac{1}{4}e^{\frac{3\pi}{4}i}.$$

48. Ако је $y \xrightarrow{L} Y$, тада је $y' \xrightarrow{L} sY$ и $\int_0^t y(x)dx \xrightarrow{L} \frac{1}{s}Y$. Како је

$$\frac{1}{2}tf(t) \xrightarrow{L} e^{-3s}\frac{3s+1}{s^2},$$

из дате једначине добијамо

$$\left(s-\frac{1}{s}\right)Y = e^{-3s}\frac{3s+1}{s^2}.$$

Решавањем по Y налазимо да је

$$Y = \frac{3s+1}{s(s^2-1)}e^{-3s} = \frac{1-s^2+3s+s^2}{s(s^2-1)}e^{-3s} = \left(-\frac{1}{s}+\frac{3+s}{s^2-1}\right)e^{-3s}.$$

Сада лако добијамо инверзну Лапласову слику од Y,

$$y(t) = (-1+3\sinh(t-3)+\cosh(t-3))u(t-3).$$

Напомена. Ако је почетни услов $y(0)=A$, тада је $y' \xrightarrow{L} sY - A$, па је

$$Y(s) = \frac{3s+1}{s(s^2-1)}e^{-3s} + A\frac{s}{s^2-1},$$

а решење дате једначине је

$$y(t) = (-1+3\sinh(t-3)+\cosh(t-3))u(t-3) + A\sinh t.$$

55. Придружени систем је

$$\frac{dx}{yx^2-xz} = \frac{dy}{y^2x+yz} = \frac{dz}{z}.$$

Из једнакости

$$\frac{ydx+xdy}{y^2x^2-xyz+y^2x^2+xyz} = \frac{d(xy)}{2(yx)^2} = \frac{dz}{z}$$

добијамо први интеграл

$$\ln z^2 + \frac{1}{xy} = A,$$

а из једнакости

$$\frac{ydz-xdy}{y^2x^2-yxz-y^2x^2-xyz} = \frac{ydx-xdy}{-2xyz} = \frac{dz}{z}$$

добијамо други први интеграл

$$\frac{x}{y}e^{2z} = B.$$

Да ли су ови први интеграли независни? Ако је

$$\varphi(x,y,z)=\ln z^2+\frac{1}{xy},\quad \psi(x,y,z)=\frac{x}{y}e^{2z},$$

тада је

$$\begin{vmatrix}\varphi'_x & \varphi'_y\\ \psi'_x & \psi'_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{1}{x^2y} & -\frac{1}{xy^2}\\ \frac{1}{y}e^{2z} & -\frac{x}{y^2}e^{2z}\end{vmatrix}=\frac{2e^{2z}}{xy^3}\neq 0.$$

Према томе, добијени први интеграли су независни, па је опште решење дате једначине имплицитно дефинисано једнакошћу

$$F\left(\ln z^2+\frac{1}{xy},\frac{x}{y}e^{2z}\right)=0,$$

где је F диференцијабилна функција две променљиве.

56. За подинтегралну функцију f важи $f(z)\sim\dfrac{2}{z(z^2+1)^2}$ када $z\to 0$, што значи да је $z=0$ пол првог реда за функцију f. Лако се види да је $\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=2$.

Тачке $z=i$ и $z=-i$ су полови другог реда и припадају области коју ограничава контура C. У тачки $z=i$ је

$$\begin{aligned}\operatorname*{res}_{z=i} f(z)&=\lim_{z\to i}\left(\frac{\sin 2z}{z^2(z+i)^2}\right)'\\ &\overset{LP}{=}\lim_{z\to i}\frac{2\cos z\cdot z(z+i)-2\sin 2z\cdot(z+i)-2\sin 2z\cdot z}{z^3(z+i)^3}\\ &=\frac{2\cos(2i)+3i\sin(2i)}{4}\\ &=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{2}e^{-2}-\frac{1}{2}e^{2}\right).\end{aligned}$$

Слично се добија да је $\operatorname*{res}_{z=-i} f(z)=\operatorname*{res}_{z=i} f(z)$.

Према томе,

$$I=2\pi i\left(2+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}e^{-2}-\frac{1}{2}e^{2}\right)\right)=(4-\sinh 2+2e^{-2})\pi i.$$

57. Ако је $L[f]=F$ и $f(t)=\dfrac{g(t)}{t}$, онда је

$$g\xrightarrow{L}\frac{6}{(s^2-1)(s^2-9)},\qquad F(s)=6\int_s^{\infty}\frac{dz}{(z^2-1)(z^2-9)}.$$

Како је

$$\frac{1}{(z^2-1)(z^2-9)}=-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{z-1}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{z+1}+\frac{1}{48}\cdot\frac{1}{z-3}-\frac{1}{48}\cdot\frac{1}{s+3},$$

то је

$$\begin{aligned}F(s) &= -\frac{3}{8}\int_s^{\infty}\frac{dz}{z-1}+\frac{3}{8}\int_s^{\infty}\frac{dz}{z+1}+\frac{1}{8}\int_s^{\infty}\frac{dz}{z-3}-\frac{1}{8}\int_s^{\infty}\frac{dz}{z+3}\\ &= -\frac{1}{8}\ln\frac{(s+1)^3(s-3)}{(s-1)^3(s+3)}\\ &= \frac{1}{8}\ln\frac{s-3}{s+3}-\frac{3}{8}\ln\frac{s-1}{s+1}.\end{aligned}$$

61. Из једнакости $\dfrac{d(x+z)}{(x+z)^2}=\dfrac{dy}{x+z}$ имамо први интеграл $\dfrac{x+z}{e^y}=C_1$, а из једнакости $\dfrac{dx}{dz}=\dfrac{x^2+z^2}{2xz}$ добијамо Бернулијеву једначину

$$x'-\frac{1}{2z}x=\frac{z}{2}x^{-1}.$$

Решавањем ове једначине налазимо други први интеграл $\dfrac{x^2-z^2}{z}=C_2$.

Према томе, $u=F\left(\dfrac{x+z}{e^y},\dfrac{y^2-z^2}{z}\right)$, где је F диференцијабилна функција две промењиве.

62. Како је $f(z)=\dfrac{e^{\overline{z}}+e^{-\overline{z}}}{2}=\dfrac{e^{x-iy}+e^{iy-x}}{2}$, то је $f(z)=u+iv$, где је

$$u(x,y)=\cosh x\cos y,\qquad v(x,y)=-\sinh x\sin y.$$

Из Коши Риманових услова

$$\sinh x\cos y=-\sinh x\cos y,\qquad -\cosh x\sin y=\cosh x\sin y$$

следи да је $\sin y=0$ и $\sinh x=0$, односно $y=k\pi$ и $x=0$.

Према томе, функција је диференцијабилна у тачкама $z_k=k\pi i$, где је $k\in\mathbb{Z}$.

63. Уочимо најпре да је

$$\int_0^t(y''(x)+y'(x))\cos(t-x)dx=(y'''+y')*\cos)(t).$$

Ако је $Y=L[y]$, тада је

$$4sY-5Y+65\cdot\frac{2}{s^2+2^2}=(s^3+s)Y\cdot\frac{s}{s^2+1}=s^2Y,$$

па је

$$\begin{aligned} Y &= \frac{130}{(s^2+4)(s^2-4s+5)} \\ &= \frac{8s+2}{s^2+4} + \frac{-8s+30}{s^2-4s+5} \\ &= 8\cdot\frac{s}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+4} - 8\cdot\frac{s-2}{(s-2)^2+1} + 14\cdot\frac{1}{(s-2)^2+1}. \end{aligned}$$

Инверзном Лапласовом трансформацијом добијамо да је

$$y(t) = 8\cos 2t + \sin 2t + e^{2t}(14\sin t - 8\cos t).$$

64. Из једнакости

$$\frac{dx}{x+y-xy^2} = \frac{dy}{x-y-x^2y} = \frac{dz}{x^2+y^2}$$

следи да је

$$\frac{xdx-ydy}{x(x+y-xy^2)-y(x-y-x^2y)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{d(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = \frac{dz}{x^2+y^2},$$

као и

$$\frac{ydx+xdy}{y(x+y-xy^2)+x(x-y-x^2y)} = \frac{d(xy)}{(x^2+y^2)(1-xy)} = \frac{dz}{x^2+y^2}.$$

Према томе, први интеграли су

$$x^2-y^2-2z = C_1, \qquad z+\ln|xy-1| = C_2,$$

а решење једначине је дато имплицитно једнакошћу

$$F(x^2-y^2-2z, z+\ln|xy-1|) = 0.$$

65. Сингуларне тачке интегранда су $z=-i$, $z=i$ и $z=k\pi$, а области $\{z \mid |z-i|^2 \le 2\}$ припадају само тачке $z=i$ (пол првог реда) и $z=0$ (пол другог реда).

Како је

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{1}{(z+i)z\cdot\sin z} = \frac{1}{2i\cdot i\cdot\sin i} = \frac{i}{2\sinh 1},$$

$$\begin{aligned} \operatorname*{res}_{z=0} f(z) &= \lim_{z\to 0}\left(z^2 f(z)\right)' \\ &= \lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{(z^2+1)\sin z}\right)' \\ &= \lim_{z\to 0}\frac{(z^2+1)\sin z - z[2z\sin z + (z^2+1)\cos z]}{(z^2+1)^2\sin^2 z} \\ &= \dots \\ &= 0, \end{aligned}$$

то је

$$\int_{C^+} f(z)dz = 2\pi i \left[\operatorname*{res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{res}_{z=0} f(z)\right] = 2\pi i \cdot \frac{i}{2\sinh 1} = -\frac{\pi}{\sinh 1}.$$

66. Из $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ следи да је

$$\begin{aligned}\sinh^3 t &= \frac{1}{8}\left(e^{3t} - 3e^{2t}\cdot e^{-t} + 3e^t \cdot e^{-2t} - 3^{-3t}\right)\\ &= \frac{1}{8}\left(e^{3t} - e^{-3t}\right) - \frac{3}{8}\left(e^t - e^{-t}\right)\\ &= \frac{1}{4}\sinh 3t - \frac{3}{4}\sinh t,\end{aligned}$$

па је

$$F(s) = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{s^2-9} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s^2-1}.$$

Друго решење је дато у *старој збирци*[1], зад.404 на стр.145.

67. Из једнакости

$$\frac{dx}{x+y} = \frac{dy}{x-y} = \frac{dz}{2y}$$

имамо да је

$$\frac{dx-dy}{2y} = \frac{dz}{2y}, \quad y' = \frac{x-y}{x+y}.$$

Први интеграли су

$$x - y - z = C_1, \quad y^2 + 2xy - x^2 = C_2,$$

а решење једначине је

$$u(x,y,z) = F(x-y-z, y^2+2xy-x^2).$$

68. Сингуларне тачке $z_k = (2k+1)\pi i$ су решења једначине $e^z + 1 = 0$, при чему само z_0 и z_{-1} припадају области $\{z \mid |z| \le 4\}$. Како је

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \lim_{z\to\pi i}\frac{(z-\pi i)\cos z}{e^z+1} = \lim_{z\to\pi i}\frac{\cos z - (z-\pi i)\sin z}{e^z} = \frac{\cos\pi i}{e^{\pi i}} = -\cosh\pi \ne 0,$$

$$\lim_{z\to z_{-1}}(z-z_0)f(z) = \lim_{z\to-\pi i}\frac{(z+\pi i)\cos z}{e^z+1} = \lim_{z\to-\pi i}\frac{\cos z - (z+\pi i)\sin z}{e^z} = -\cosh\pi \ne 0,$$

то су z_0 и z_{-1} полови првог реда.

[1] Д. Ђорић, МАТЕМАТИКА 3 - Збирка решених задатака, ФОН, 2009.

Према томе,

$$\int_{C^-} f(z)dz = -\int_{C^+} f(z)dz = -2\pi i \left[\operatorname*{res}_{z_0} f(z) + \operatorname*{res}_{z_{-1}} f(z)\right] = -2\pi i \cdot (-2\cosh\pi) = 4\pi i \cdot \cosh\pi.$$

69. Ако је $Y = L[y]$, тада је

$$(s^2 + 4s + 4)Y = 2 + \frac{e^{-2s}}{s}.$$

Како је

$$G(S) = \frac{1}{s(s+2)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(s+2)^2},$$

то је $L^{1-}[G] = g$, где је

$$g(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{2}te^{-2t}.$$

Инверзну слику за Y сада можемо да изразимо помоћу функције g,

$$y(t) = 2te^{-2t} + g(t-2)u(t-2).$$

70. Придружени систем је

$$\frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{x+y}.$$

Из једнакости $\dfrac{d(x+y)}{(x+y)^2} = \dfrac{dz}{x+y}$ имамо да је $\dfrac{x+y}{e^z} = C_1$, а из једначине

$$x' = \frac{1}{2y}x + \frac{y}{2}x^{-1}$$

добијамо да је $\dfrac{x^2-y^2}{y} = C_2$.

Решење дате једначине је $u = F\left(\frac{x+y}{e^z}, \frac{x^2-y^2}{y}\right)$, где је F диференцијабилна функција две променљиве.

71. Како је

$$f(z) = \cosh x \cos y - i \sinh x \sin y,$$

из Коши Римановых услова следи да је $\sin y = 0$ и $\sinh x = 0$.

Према томе, функција f је диференцијабилна у тачкама $z = k\pi i$.

72. Ако је $Y = L[y]$, тада је

$$Y = \frac{130}{(s^2+4)(s^2-4s+5)} = \frac{8s+2}{s^2+4} + \frac{-8s+30}{s^2-4s+5}.$$

Решење дате једначине је

$$y(t) = 8\cos 2t + \sin 2t + e^{2t}(14\sin t - 8\cos t).$$

121. Опште решење дате једначине дефинисано је имплицитно једнакошћу

$$F\left(\ln|x| + \frac{1}{e^z}, \frac{z+1}{e^z} - \frac{1}{xy}\right) = 0,$$

где је F диференцијабилна функција две променљиве.

122. Сингуларне тачке су $z = 0$ (пол првог реда) и $z = 3$ (пол другог реда), при чему је

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{\pi}{54}, \quad \operatorname*{res}_{z=3} f(z) = -\frac{2}{27}.$$

Према томе,

$$I = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{res}_{z=3} f(z)\right) = \frac{\pi(\pi-4)}{27} i.$$

123. Ако је $X = L[x]$ и $Y = L[y]$, тада је

$$X(s) = \frac{17s^3 + 51s^2 + 20s + 57}{s(s+4)(s^2+1)}, \quad Y(s) = \frac{17s^3 + 102s^2 + 17s + 114}{s(s+4)(s^2+1)},$$

а решење датог система је

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{67}{4} + \frac{295}{68}e^{-4t} - \frac{27}{17}\cos t + \frac{6}{17}\sin t \\ y(t) &= \frac{57}{2} - \frac{295}{34}e^{-4t} - \frac{48}{17}\cos t - \frac{12}{17}\sin t. \end{aligned}$$

133. Решење датог система је

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{4t} + C_2 e^{-2t} \\ y(t) &= C_1 e^{4t} + (C_2 + 2C_3)e^{-2t} \\ z(t) &= C_1 e^{4t} + C_3 e^{-2t}. \end{aligned}$$

134. Дату контуру C можемо да разложимо на дуж C_1 и полукружницу C_2. Параметризацијом линија C_1 и C_2 добијамо да је

$$I_1 = \int_{C_1} f(z)dz = 0, \quad I_2 = \int_{C_2} f(z)dz = 2(3 - 2\sqrt{2})i.$$

Према томе, $I = I_1 + I_2 = 2(3 - 2\sqrt{2})i$.

135. Ако је $Y = L[y]$, тада је

$$Y(s) = \frac{25}{s^2(s^2-4s+5)} + \frac{s-2}{s^2-4s+5)},$$

а решење једначине је

$$y(t) = 4 + 5t + 3e^{2t}(\sin t - \cos t).$$