

# МАТЕМАТИКА 3

---

Решени примери писменог испита

---

Драган Ђорић

*Новогодишњи пакет*



*Студентима генерације 2015*

## Садржај

Пример 1 (2001, јануар)	1
Пример 2 (2001, април)	3
Пример 3 (2001, април)	6
Пример 4 (2004, децембар)	9
Пример 5 (2005, јануар)	12
Пример 6 (2005, фебруар)	15
Пример 7 (2005, фебруар)	18
Пример 8 (2005, јуни)	21
Пример 9 (2005, јуни)	26
Пример 10 (2005, јуни)	30
Пример 11 (2005, септембар)	33
Пример 12 (2005, септембар)	35
Пример 13 (2007, септембар)	38
Пример 14 (2007, септембар)	42

## Пример 1 (2001, јануар)

1. Решити диференцијалну једначину  $x^2yy' = 2x^3 - y^3$ .

2. Одредити екстремале функционала  $J$  ако је

$$J[y] = \int_a^b (xy' + 12yy' - y'^2)e^x dx.$$

3. Израчунати  $\int_{C^+} \frac{\ln(z+a)}{z^2+a^2}$  ако је  $a \in \mathbb{R}$ ,  $1 < a < 2$  и ако је  $C$  граница правоугаоника чија су темена тачке  $-1-2i$ ,  $1-2i$ ,  $1+2i$  и  $-1+2i$ .

4. (1) Одредити  $L^{-1}[F]$  ако је  $F(s) = \frac{s}{(s^2-1)^2}$ .

(2) Решити једначину  $y'(t) + \int_0^t y(x)dx = h(t-1)$ , где је  $y(0) = 1$  и где је  $h$  јединична одскачна функција.

## РЕЗУЛТАТИ

1.  $\frac{y^2 + 2xy + 2x^2}{(x-y)^2 x^{10}} = Ce^{\arctan(1+y/x)}, C \in \mathbb{R}^+.$

2.  $y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{12}x - \frac{7}{72}.$

3.  $I = \frac{\pi^2 i}{2a}.$

4. (1)  $L^{-1}[F] = f$ , где је  $f(t) = \frac{1}{2}t \sinh t$ . (2)  $y(t) = h(t-1) \sin(t-1) + \cos t.$

## Р Е Ш Е Њ А

1. Сменом  $y/x = u$  добијамо једначину  $\frac{udu}{2-u^3-u^2} = \frac{dx}{x}$  која раздваја променљиве. Како је

$$\frac{u}{2-u^2-u^3} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{u-1} + \frac{1}{5} \cdot \frac{u-2}{u^2+2u+2},$$

интеграцијом имамо да је

$$-\frac{1}{5} \ln |u-1| + \frac{1}{10} \ln(u^2+2u+2) - \frac{3}{5} \arctan(u+1) = \ln |x| + A, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Из ове једнакости добијамо облик решења који је дат у резултатима.

2. Ако је  $F(x, y, y') = (xy' + 12yy' - y'^2)e^x$ , тада је

$$F'_y = 12y'e^x, \quad F'_{y'} = (x + 12y - 2y')e^x, \quad F''_{y'x} = (1 + x + 12y - 2y')e^x, \quad F''_{y'y} = 12e^x, \quad F''_{y'y'} = -2e^x.$$

Решавањем Ојлерове једначине

$$y'' + y' - 6y = \frac{x+1}{2}$$

добијамо дато решење.

3. Како сингуларитети  $z_1 = ai$  и  $z_2 = -ai$  припадају датом правоугонику и како је

$$\operatorname{res}_{z=z_1} f = \frac{\ln(z_1 + a)}{z_1 - z_2}, \quad \operatorname{res}_{z=z_2} f = \frac{\ln(z_2 + a)}{z_2 - z_1},$$

то је

$$I = 2\pi i (\operatorname{res}_{z=z_1} f + \operatorname{res}_{z=z_2} f) = 2\pi i \frac{\ln(z_1 + a) - \ln(z_2 + a)}{z_1 - z_2} = 2\pi i \cdot \frac{\ln i}{2ai} = \frac{\pi^2 i}{2a}.$$

4. (1) Из једнакости  $G(s) = \frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \right)$  следи да је  $L^{-1}[G] = g$ , где је  $g(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \sinh t$ . Како је  $F = -\frac{1}{2}G'$ , то је  $f(t) = \frac{1}{2}tg(t) = \frac{1}{2}\sinh t$ .

(2) Ако је  $Y = L[y]$ , тада из дате једначине имамо да је

$$sY - y(0) + \frac{1}{s}Y = \frac{e^{-s}}{s}.$$

Решавањем по  $Y$  добијамо

$$Y(s) = \frac{e^{-s}}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1},$$

одакле следи да је  $y(t) = h(t-1)\sin(t-1) + \cos t$ .

## Пример 2 (2001, април)

1. Решити једначину  $(1 - x^2)y'' - xy' = 2$ .

2. Одредити решење једначине

$$(z^2 + y^2 - x^2)z'_x - 2xyz'_y + 2xz = 0$$

за које је  $z(x, x) = 1$ .

3. Израчунати  $\int_{C^+} \frac{\cot z}{4z - \pi} dz$  ако је  $C = \{z \mid |z| = 1\}$ .

4. Решити Кошијев проблем

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = f(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1,$$

где је  $f(t) = 0$  за  $t < 1$  и  $f(t) = e^{1-t}$  за  $t \geq 1$ .

### РЕЗУЛТАТИ

1.  $y(x) = \arcsin^2 x + C \arcsin x + D$ .

2.  $x(x^2 + y^2 + z^2) = 2y^2 + z^2$ .

3.  $I = \frac{\pi - 4}{2}i$ .

4.  $y(t) = e^{-t} + \frac{(t-1)^2}{2}e^{-(t-1)}h(t-1)$ .

### УПУТСТВА – МЕЂУРЕЗУЛТАТИ

1. Сменом  $y' = z$  добија се линеарна једначина

$$z' - \frac{x}{1-x^2}z = \frac{2}{1-x^2}$$

чије је решење

$$z(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(2 \arcsin x + C).$$

2. Из једнакости  $z = Cy$  имамо један први интеграл, а из једнакости

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{2(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{dz}{z}$$

имамо још један први интеграл. Опште решење је  $F\left(\frac{z}{y}, \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y}\right) = 0$ . Други први интеграл може да се добије и из Бернулијеве једначине

$$x' - \frac{1}{2y}x = -\frac{(C^2 + 1)}{2}yx^{-1}.$$

3. Датом кругу припадају сингуларитети  $z = \pi/4$  и  $z = 0$ .

4. Ако је  $F = Lpf[$  и  $Y = L[y]$ , тада је

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}, \quad Y(s) = \frac{F(s)}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1}.$$

## Р Е Ш Е Њ А

1. Сменом  $z(x) = y'$  добијамо линеарну једначину

$$z' - \frac{x}{1-x^2}z = \frac{2}{1-x^2}$$

чије је решење

$$z(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(2 \arcsin x + A), \quad A \in \mathbb{R}.$$

Решавањем једначине  $y' = z$  налазимо да је

$$y(x) = \arcsin^2 x + A \arcsin x + B, \quad B \in \mathbb{R}.$$

2. Из придруженог система

$$\frac{dx}{z^2 + y^2 - x^2} = -\frac{dy}{2xy} = -\frac{dz}{2xz}$$

имамо једнакости

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}, \quad \frac{xdx + ydy + zdz}{x(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{dz}{2xz}$$

из којих добијамо независне прве интеграле и опште решење

$$F\left(\frac{y}{z}, \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z}\right) = 0.$$

За партикуларно решење имамо функцију  $F(a, b) = F(t, 2t^2 + 1)$ . Како за аргументе  $a$  и  $b$  важи  $b = a^2 + 1$ , опште решење је дато са

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z} = 2\frac{y^2}{z^2} + 1,$$

односно са

$$z(x^2 + y^2 + z^2) = z^2 + 2y^2.$$

Напомена 1. Ако се пође од једнакости

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{x(x^2 + y^2 + z)} = \frac{dy}{2xy},$$

добија се опште решење

$$G\left(\frac{z}{y}, \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y}\right) = 0.$$

Партикуларно решење се добија из везе  $uv = u^2 + 2$  аргумената  $u$  и  $v$  функције  $G(u, v)$ .

Напомена 2. Први интеграл за решење из претходне напомене може да се добије и из Брнулијеве једначине

$$x' - \frac{1}{2y}x = -\frac{C^2 + 1}{2}yx^{-1},$$

где је  $C = \frac{z}{y}$ .

3. Сингуларитети подинтегралне функције  $f$  су тачке  $z = \pi/4$  и  $z = \pi + k\pi$ , где је  $k \in \mathbb{Z}$ , при чему области коју затвара контура  $C$  припадају само тачке  $z_1 = \pi/4$  и  $z_2 = 0$ . Како је

$$\operatorname{res}_{z=z_1} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} \left(z - \frac{\pi}{4}\right) f(z) = \frac{1}{4}, \quad \operatorname{res}_{z=z_2} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{4z - \pi} = -\frac{1}{\pi},$$

то је

$$\int_{C^+} \frac{\cot z}{4z - \pi} dz = 2\pi i \left( \operatorname{res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname{res}_{z=z_2} f(z) \right) = 2\pi i \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \right) = \frac{\pi - 4}{2} \cdot i.$$

4. Како је  $f(t) = u(t-1)e^{-(t-1)}$ , то је  $L[f](s) = \frac{e^{-s}}{s+1}$ . Ако је  $Y = L[y]$ , онда из дате једначине добијамо

$$s^2 Y - s + 1 + 2sY - 2 + Y = \frac{e^{-s}}{s+1},$$

односно  $Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{e^{-s}}{(s+1)^3}$ , па је

$$y(t) = L^{-1}[Y](t) = e^{-t} + \frac{(t-1)^2}{2} e^{-(t-1)} u(t-1).$$

### Пример 3 (2001, април)

1. Решити диференцијалну једначину

$$xy' + x \cos \frac{y}{x} - y + x = 0.$$

2. Одредити партикуларно решење једначине

$$2xz'_x + 2yzz'_y = z^2 - x^2 - y^2$$

за које важи

$$x + y + z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad (a \in \mathbb{R}, a \neq 0).$$

3. Израчунати  $\int_{C^+} \frac{e^z dz}{ch z}$  ако је  $C = \{x + iy \mid |x| + |y| = 2\}$ .

4. Решити Кошијев проблем

$$y''(t) + 1 = f(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

где је  $f(t) = \frac{|\sin t|}{\sin t}$  за  $t \in (0, 2\pi)$  и  $f(t) = 0$  за  $t \geq 2\pi$ .

---

#### РЕЗУЛТАТИ

1.  $\tan \frac{y}{2x} = \ln \frac{C}{x}$ .
2.  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2a^2(x^2 + y^2 + xy)$ .
- 3.
- 4.

---

#### УПУТСТВА – МЕЂУРЕЗУЛТАТИ

1. Сменом  $y/x = u$  дата једначина се своди на једначину  $xu' = -(1 + \cos u)$ .
2. Први интеграл се добијају из једнакости  $y = Cx$  и из Бернулијеве једначине

$$z' - \frac{1}{2x}z + \frac{x(1 + C^2)}{2}z^{-1} = 0.$$

Опште решење је

$$\frac{z^2 + x^2 + y^2}{x} = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

- 3.
- 4.



## Р Е Ш Е Њ А

1. Дата једначина је хомогена, па се сменом  $y/x = u$  своди на једначину која раздваја променљиве

$$\frac{du}{1 + \cos u} = -\frac{dx}{x}.$$

Узимајући у обзир да је  $1 + \cos u = 2 \cos^2 \frac{u}{2}$  лако налазимо да је  $\tan \frac{u}{2} = \ln \frac{C}{x}$  решење ове једначине.

Према томе, решење дате једначине је

$$\tan \frac{y}{2x} = \ln \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. Из придруженог система имамо једнакости

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z^2 - x^2(1 + C^2)}{2xz}.$$

Ако у другој једнакости заменимо  $y$  са  $Cx$ , добијамо Бернулијеву једначину

$$z' - \frac{1}{2x}z + \frac{x(1 + C^2)}{2}z^{-1} = 0$$

чије је решење  $z^2 + x^2 + y^2 = Dx$ . Према томе, опште решење дате једначине је дефинисано са

$$z^2 + x^2 + y^2 = xF\left(\frac{y}{x}\right).$$

За партикуларно решење треба из једнакости

$$x + y + z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad \frac{y}{x} = C, \quad \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x} = D$$

елиминисати  $x$ ,  $y$  и  $z$ , односно наци вези између  $C$  и  $D$ . Ако у другој једнакости заменимо  $z$  са  $-x - y$  (из прве једнакости) и  $y$  са  $Cx$  (из треће једнакости), добијамо  $a^2 = 2x^2(1 + C^2 + C)$ . Слично из четврте једнакости добијамо  $a^2 = Dx$ , што значи да је  $D^2 = 2a^2(1 + C + C^2)$ . Према томе, партикуларно решење је дефинисано имплицитно једнакошћу

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2a^2(x^2 + y^2 + xy).$$

3. Како је  $\operatorname{ch} z = 0$  ако је  $e^z + e^{-z} = 0$ , односно  $e^{2z} + 1 = 0$ ,  $2z = \operatorname{Ln}(-1)$ , сингуларитети подинтегралне функције  $f$  датог интеграла  $I$  су тачке  $z_k = \frac{2k+1}{2}\pi i$ . Међутим, једино тачке  $z_0 = \frac{\pi}{2}i$  и  $z_{-1} = -\frac{\pi}{2}i$  припадају области ограниченој кружницом  $C$ . Из

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = e^{\pi i/2} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - \pi i/2}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^{\pi i/2}}{\operatorname{sh}(\pi i/2)} = \frac{e^{\pi i/2}}{i \sin(\pi/2)} = \frac{1}{i} e^{\pi i/2},$$

$$\operatorname{res}_{z=z_{-1}} f(z) = e^{-\pi i/2} \lim_{z \rightarrow z_{-1}} \frac{z + \pi i/2}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^{-\pi i/2}}{\operatorname{sh}(-\pi i/2)} = \frac{e^{-\pi i/2}}{i \sin(-\pi/2)} = -\frac{1}{i} e^{-\pi i/2},$$

то је

$$I = 2\pi i (\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) + \operatorname{res}_{z=z_{-1}} f(z)) = 2\pi (e^{\pi i/2} - e^{-\pi i/2}) = 4\pi i.$$

4. Како је

$$L[f](s) = \int_0^{\pi} e^{-st} dt - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-st} dt = \frac{1}{s} - \frac{2}{s} e^{-\pi s} + \frac{1}{s} e^{-2\pi s},$$

из дате једначине добијамо да је

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^3} e^{-\pi s} + \frac{1}{s^3} e^{-2\pi s},$$

где је  $Y = L[y]$ . Према томе,

$$y(t) = L^{-1}[Y](t) = 1 - (t - \pi)^2 u(t - \pi) + \frac{1}{2} (t - 2\pi)^2 u(t - 2\pi).$$

### Пример 4 (2004, децембар)

1. За диференцијалну једначину  $(x^2y + y + 1)dx + (x^3 + x)dy = 0$  одредити интеграциони фактор облика  $\lambda(x)$ , а затим решити диференцијалну једначину са тоталним диференцијалом.

2. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$x' = 2x - y + 2z$$

$$y' = x + 2z$$

$$z' = -2x + y - z.$$

3. Израчунати  $\int_{C^+} \frac{e^{\pi z} dz}{z^4 + 4z^2}$  ако је  $C = \{z \mid |z + i| = 2\}$ .

4. Применом Лапласове трансформације одредити партикуларно решење једначине  $y'' + 4y = 3t + 5$  ако је  $y(0) = y'(0) = 2$ .

---

#### РЕЗУЛТАТИ

---

1.  $\lambda(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad xy + \arctan x = C.$

2. Опште решење је

$$x = (C_2 + C_3) \cos t + (-C_2 + C_3) \sin t,$$

$$y = 2C_1 e^t + (C_2 + C_3) \cos t + (-C_2 + C_3) \sin t,$$

$$z = C_1 e^t - C_2 \cos t - C_3 \sin t.$$

3.  $I = 2\pi i \left( \operatorname{res}_{z=0} f + \operatorname{res}_{z=-2i} f \right) = 2\pi i \left( \frac{\pi}{4} - \frac{i}{16} \right) = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi^2}{2}i.$

4.  $y(t) = \frac{3}{4}t + \frac{5}{8} \sin 2t + \frac{5}{4} + \frac{3}{4} \cos 2t.$

## Р Е Ш Е Њ А

1. Једначина са интеграционим фактором  $\lambda(x)$  је

$$\lambda(x)(x^2y + y + 1)dx + \lambda(x)(x^3 + x)dy = 0.$$

Ако је  $P(x, y) = \lambda(x)(x^2y + y + 1)$  и  $Q(x, y) = \lambda(x)(x^3 + x)$ , претходна једначина је једначина са тоталним диференцијалом ако је  $P'_y = Q'_x$ , односно ако је

$$\lambda(x)(x^2 + 1) = \lambda'(x)(x^3 + x) + \lambda(x)(3x^2 + 1).$$

Из једначине  $\frac{\lambda'}{\lambda} = -\frac{2x^2}{x+x^3}$  добијамо  $\lambda = \frac{1}{1+x^2}$ . Опште решење једначине са тоталним диференцијалом је  $xy + \arctan x = C$ .

2. Ако је  $A$  матрица датог система, онда је  $|A - \lambda I| = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$ . За  $\lambda = 1$  имамо  $X_1 = (0 \ 2 \ 1)^T e^t$ , а за  $\lambda = i$  имамо комплексно партикуларно решење

$$X_{kom} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1+i \\ -1 \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t - \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t + \sin t \\ -\sin t \end{pmatrix} \cdot i.$$

Ако је  $X_2 = \operatorname{Re}(X_{kom})$  и  $X_3 = \operatorname{Im}(X_{kom})$ , онда су  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  независна партикуларна решења, па је опште решење

$$\begin{aligned} x &= (C_2 + C_3) \cos t + (-C_2 + C_3) \sin t, \\ y &= 2C_1 e^t + (C_2 + C_3) \cos t + (-C_2 + C_3) \sin t, \\ z &= C_1 e^t - C_2 \cos t - C_3 \sin t. \end{aligned}$$

Друго решење: Свођењем на једначину вишег реда добијамо да је  $y''' - y'' + y' - y = 0$ . Опште решење ове једначине је

$$y(t) = D_1 e^t + D_2 \cos t + D_3 \sin t, \quad D_1, D_2, D_3 \in \mathbb{R},$$

а из једнакости  $2x = y - y''$  и  $4z = y'' + 2y' - y$  налазимо  $x(t)$  и  $z(t)$ .

3. Сингуларне тачке функције  $f: z \mapsto \frac{e^{\pi z}}{z^2(z^2 + 4)}$  су  $z_0 = 0$ ,  $z_1 = 2i$  и  $z_2 = -2i$ . Пошто тачка  $z_1$  не припада области ограниченој контуром  $C$ , то је

$$I = 2\pi i \left( \operatorname{res}_{z=0} f + \operatorname{res}_{z=-2i} f \right).$$

Како је

$$\operatorname{res}_{z=0} f = \lim_{z \rightarrow 0} \left[ \frac{e^{\pi z}}{z^2 + 4} \right]' = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\pi e^{\pi z}(z^2 + 4) - 2ze^{\pi z}}{(z^2 + 4)^2} = \frac{\pi}{4}$$

и

$$\operatorname{res}_{z=-2i} f = \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{e^{\pi z}}{z^2(z-2i)} = \frac{e^{-2\pi i}}{(-2i)^2(-4i)} = \frac{\cos(-2\pi) + i \sin(-2\pi)}{16i} = -\frac{i}{16},$$

добијамо да је  $I = 2\pi i \left( \frac{\pi}{4} - \frac{i}{16} \right) = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi^2}{2} i$ .

4. Ако је  $y \xrightarrow{L} Y$ , тада  $y'' \xrightarrow{L} s^2 Y - 2s - 2$ , па из дате једначине и датих услова добијамо једнакост

$$s^2 Y - 2s - 2 + 4Y = \frac{3}{s^2} + \frac{5}{s}$$

из које следи да је

$$Y = \frac{3}{s^2(s^2+4)} + \frac{2s}{s^2+4} + \frac{5}{s(s^2+4)} + \frac{2}{s^2+4}.$$

Користећи једнакости

$$\frac{1}{s^2(s^2+4)} = \frac{4+s^2-s^2}{4s^2(s^2+4)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s^2+4},$$

$$\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{4} \cdot \frac{s}{s^2+4}$$

добивамо да је

$$Y = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{s^2+2^2} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{s} + \frac{3}{4} \cdot \frac{s}{s^2+2^2}.$$

Према томе,  $y(t) = \frac{3}{4}t + \frac{5}{8}\sin 2t + \frac{5}{4} + \frac{3}{4}\cos 2t$ .

## Пример 5 (2005, јануар)

1. Одредити опште решење диференцијалне једначине  $x(1 - x - xy)y' = 1 + y$ .
2. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}x' &= 2x + y - z \\y' &= x + 3y - z \\z' &= 3x - y + 3z.\end{aligned}$$

3. Израчунати  $\int_{C^+} \frac{2z - \pi}{\cos^2 z} dz$ , ако је  $C = \{z : |z - \pi/2| = \pi/2\}$ .
4. Одредити Лапласову слику функције  $f : t \mapsto \frac{e^{-3t} \sin^2 t}{t}$ .

---

### РЕЗУЛТАТИ

---

1.  $\frac{1}{x} = \frac{C}{1+y} + \frac{1+y}{2}$ .
2. Опште решење је

$$\begin{aligned}x &= C_2(\cos t - \sin t)e^{3t} + C_3(\cos t + \sin t)e^{3t} \\y &= C_1e^{2t} + C_2(2\cos t - \sin t)e^{3t} + C_3(\cos t + 2\sin t)e^{3t} \\z &= C_1e^{2t} + C_2(2\cos t + \sin t)e^{3t} + C_3(-\cos t + 2\sin t)e^{3t}.\end{aligned}$$

3.  $I = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=\pi/2} f(z) = 4\pi i$ .
4.  $L[f] = F(s) = \frac{1}{2} \ln \frac{s+3}{\sqrt{s^2+6s+13}}$ .

## Р Е Ш Е Њ А

1. Сменом  $1 + y = z$  имамо једначину  $\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x - x^2z}$ , односно једначину  $\frac{dx}{dz} = \frac{x - x^2z}{z}$  или

$$x' - \frac{1}{z}x = -x^2.$$

Ово је Бернулијева једначина (по  $x(z)$ ) коју сменом  $u = x^{-1}$  сводимо на линеарну једначину

$$u' + \frac{1}{z}u = 1.$$

Према формули за опште решење линеарне једначине имамо да је

$$u = e^{-\int dz/z} \left( C + \int e^{\int dz/z} dz \right) = \frac{1}{z} \left( \frac{z^2}{2} \right) = \frac{C}{z} + \frac{z}{2}.$$

Враћањем променљиве  $y$  добијамо опште решење дате једначине

$$\frac{1}{x} = \frac{C}{1+y} + \frac{1+y}{2}.$$

*Напомена.* Наравно, могли смо одмах решавати Бернулијеву једначину по  $x(y)$

$$x' - \frac{x}{1+y} = -x^2.$$

2. Нуле карактеристичног полинома матрице система су 2 и  $3 + i$ . За  $\lambda = 2$  имамо систем

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

из којег следи  $b = c$  и  $a = 0$ . Једно решење датог система добијамо за  $b = c = 1$ ,

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

За  $\lambda = 3 + i$  имамо систем

$$\begin{pmatrix} -1-i & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 \\ 3 & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

из којег следи  $(2+i)a = (1+i)b$  и  $a - ib - c = 0$ . Избором  $a = 1+i$  имамо  $b = 2+i$  и  $c = 2-i$  и комплексно решење

$$X_{kom} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2+i \\ 2-i \end{pmatrix} e^{(3+i)t} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2+i \\ 2-i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t),$$

односно

$$X_{kom} = e^{3t} \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ 2 \cos t - \sin t \\ 2 \cos t + \sin t \end{pmatrix} + i \cdot e^{3t} \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t + 2 \sin t \\ -\cos t + 2 \sin t \end{pmatrix}.$$

Узимањем  $X_2 = \operatorname{Re}(X_{kom})$  и  $X_3 = \operatorname{Im}(X_{kom})$  добијамо

$$\Phi = [X_1 \ X_2 \ X_3] = \begin{pmatrix} 0 & (\cos t - \sin t)e^{3t} & (\cos t + \sin t)e^{3t} \\ e^{2t} & (2 \cos t - \sin t)e^{3t} & (\cos t + 2 \sin t)e^{3t} \\ e^{2t} & (2 \cos t + \sin t)e^{3t} & (-\cos t + 2 \sin t)e^{3t} \end{pmatrix}$$

и опште решење датог система

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix},$$

односно

$$\begin{aligned} x &= C_2(\cos t - \sin t)e^{3t} + C_3(\cos t + \sin t)e^{3t} \\ y &= C_1e^{2t} + C_2(2\cos t - \sin t)e^{3t} + C_3(\cos t + 2\sin t)e^{3t} \\ z &= C_1e^{2t} + C_2(2\cos t + \sin t)e^{3t} + C_3(-\cos t + 2\sin t)e^{3t}. \end{aligned}$$

**3.** Тачка  $z_0 = \pi/2$  је пол првог реда датог интегранда  $f$ . Како је

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} \left( z - \frac{\pi}{2} \right) \frac{2z - \pi}{\cos^2 z} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{4z - 2\pi}{-2 \cos z \cdot \sin z} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{4}{2 \sin^2 z - 2 \cos^2 z} = 2,$$

то је  $I = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = 4\pi i$ .

**4.** Пошто је

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2} \xrightarrow{L} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2 + 4},$$

то је

$$g(t) = \frac{\sin^2 t}{t} \xrightarrow{L} \frac{1}{2} \int_s^\infty \frac{dp}{p} - \frac{1}{4} \int_s^\infty \frac{2p dp}{p^2 + 4} = \frac{1}{2} \ln p - \frac{1}{4} \ln(p^2 + 4) \Big|_s^\infty,$$

односно

$$g(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{2} \ln \frac{p}{\sqrt{p^2 + 4}} \Big|_s^\infty = \frac{1}{2} \ln \frac{s}{\sqrt{s^2 + 4}} = G(s).$$

Према својству *померања аргумента слике* имамо

$$f \xrightarrow{L} G(s + 3) = \frac{1}{2} \ln \frac{s + 3}{\sqrt{s^2 + 6s + 13}}.$$



## Пример 6 (2005, фебруар)

1. Користећи погодну смену решити диференцијалну једначину

$$y' \sin y = (\sin x + \cos y) \cos x.$$

2. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y''' - y' = \frac{1}{\sinh x}.$$

3. Одредити све реалне функције  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  за које је функција

$$f : x + iy \mapsto \alpha(x)(x \cos y - y \sin y) + i\beta(x)(x \sin y + y \cos y)$$

аналитичка за све  $x + iy \in C$ .

4. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'(t) + t \sin t = \int_0^t (y'''(x) - y(x))e^{t-x} dx$$

ако је  $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ .

---

### РЕЗУЛТАТИ

1. Смена  $\cos y = z$ , решење једначине  $\cos y = 1 - \sin x + Ce^{-\sin x}$ .

2. Опште решење је

$$y = D_1 + D_2 e^x + D_3 e^{-x} + \ln \frac{e^x + 1}{|e^x - 1|} + \ln \sqrt{|e^{2x} - 1|} + \ln \sqrt{|e^{2x} - 1|} - x e^x.$$

3.  $\alpha(x) = \beta(x) = C e^x$ .

4.  $y(t) = \frac{1}{4}t(\sin t - t \cos t)$ .

## РЕШЕЊА

1. Сменом  $\cos y = z$  ( $z' = -\sin y \cdot y'$ ) од дате једначине добијамо линеарну једначину

$$z' + \cos x \cdot z = -\sin x \cos x.$$

Према формули за опште решење линеарне једначине имамо да је

$$\begin{aligned} z &= e^{-\int \cos x dx} \left( C - \int \sin x \cos x \cdot e^{\int \cos x dx} dx \right) \\ &= e^{-\sin x} \left( C - \int \sin x e^{\sin x} d(\sin x) \right) \\ &= e^{-\sin x} (C - \sin x e^{\sin x} + e^{\sin x}) \\ &= C e^{-\sin x} - \sin x + 1. \end{aligned}$$

Према томе, опште решење дате једначине је  $\cos y = 1 - \sin x + C e^{-\sin x}$ .

*Напомена.* Друго решење може да се добије налажењем интеграционог фактора  $\lambda(x) = e^{\sin x}$ .

2. Карактеристични полином хомогене једначине је  $\lambda^3 - \lambda$ , а његове нуле су  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = 1$  и  $\lambda = -1$ . Партикуларна решења хомогене једначине су  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = e^x$  и  $y_3 = e^{-x}$ , а њено опште решење је  $y_h = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$ . За опште решење нехомогене једначине, варирањем константи  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ , добијамо систем по  $C'_1$ ,  $C'_2$  и  $C'_3$ .

$$\begin{aligned} C'_1 + C'_2 e^x + C'_3 e^{-x} &= 0 \\ C'_2 e^x - C'_3 e^{-x} &= 0 \\ C'_2 e^x + C'_3 e^{-x} &= \frac{1}{\sinh x}. \end{aligned}$$

Како је  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$ , то је  $\frac{1}{\sinh x} = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}$ , па решавањем овог система добијамо да је

$$C'_1 = -\frac{2e^x}{e^{2x} - 1}, \quad C'_2 = \frac{1}{e^{2x} - 1}, \quad C'_3 = \frac{e^{2x}}{e^{2x} - 1}.$$

Затим интеграцијом налазимо да је

$$C_1 = -\ln \frac{|e^x - 1|}{e^x + 1} + D_1, \quad C_2 = \ln \sqrt{|e^{2x} - 1|} - x + D_2, \quad C_3 = \ln \sqrt{|e^{2x} - 1|} + D_3.$$

Опште решење дате једначине је  $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + C_3(x)y_3$ , односно

$$y = \underbrace{D_1 + D_2 e^x + D_3 e^{-x}}_{y_h} + \underbrace{\ln \frac{e^x + 1}{|e^x - 1|} + \ln \sqrt{|e^{2x} - 1|} + \ln \sqrt{|e^{2x} - 1|} - x e^x}_{y_p}.$$

3. Ако су  $u$  и  $v$  реални и имагинарни део дате функције,

$$u(x, y) = \alpha(x)(x \cos y - y \sin y), \quad v(x, y) = \beta(x)(x \sin y + y \cos y),$$

тада је

$$\begin{aligned} u'_x &= \alpha'(x \cos y - y \sin y) + \alpha \cos y, & v'_x &= \beta'(x \sin y + y \cos y) + \beta \sin y, \\ u'_y &= \alpha(-x \sin y - \sin y - y \cos y), & v'_y &= \beta(x \cos y + \cos y - y \sin y). \end{aligned}$$

Из Коши-Риманових услова ( $u'_x = v'_y$ ,  $u'_y = -v'_x$ ) добијамо

$$(\alpha' - \beta)(x \cos y - y \sin y) + (\alpha - \beta) \cos y = 0,$$

$$(\beta' - \alpha)(x \sin y + y \cos y) + (\beta - \alpha) \sin y = 0.$$

За  $y = 0$  следи једнакост  $(\alpha' - \beta)x + \alpha - \beta = 0$ , а за  $y = \pi/2$  следе једнакости  $\alpha' - \beta = 0$  и  $(\beta' - \alpha)x + \beta - \alpha = 0$ . Из ових једнакости налазимо да је  $\alpha' = \beta' = \alpha = \beta$ , односно  $\alpha(x) = \beta(x) = Ce^x$ .

4. Ако је  $y \xrightarrow{L} Y$ , тада (при датим условима)  $y' \xrightarrow{L} sY$ ,  $y'' \xrightarrow{L} s^2Y$  и  $y''' \xrightarrow{L} s^3Y$ . Како је

$$t \sin t \xrightarrow{L} \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}, \quad \int_0^t (y''' - y)e^{t-x} dx \xrightarrow{L} \frac{s^3 - 1}{s - 1} Y = (s^2 + s + 1)Y,$$

из дате једначине и датих услова имамо једнакост

$$sY + \frac{2s}{(s^2 + 1)^2} = (s^2 + s + 1)Y$$

из које следи да је  $Y = \frac{2s}{(s^2 + 1)^3}$ . Налажењем инверзне Лапласове слике добијамо да је

$$y(t) = \frac{1}{4}t(\sin t - t \cos t).$$

**Пример 7 (2005, фебруар)**

1. За диференцијалну једначину

$$(x + y)dx + \tan x dy = 0$$

одредити интеграциони фактор облика  $\lambda(x)$ , а затим решити једначину.

2. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y''' + y' = \frac{1}{\sin x}.$$

3. Одредити све аналитичке функције  $f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$  ако је

$$u(x, y) = \frac{\sinh 2x}{\cosh 2x + \cos 2y}.$$

4. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'''(t) - y'(t) = t \sinh t$$

ако је  $y(0) = C \in \mathbb{R}$ ,  $y'(0) = y''(0) = 0$ .

---

**РЕЗУЛТАТИ**

---

1.  $\lambda(x) = \cos x$ ,  $y \sin x + x \sin x + \cos x = C$ .
2.  $y = D_1 + D_2 \sin x + D_3 \cos x + \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| - x \sin x \cos x \ln |\sin x|$ .
3.  $f(z) = \tanh z + iC$ .
4.  $y(t) = Cu(t) + \frac{3}{4} \sinh t - \frac{3}{4} \cosh t + \frac{1}{4} t^2 \sinh t$ .

## Р Е Ш Е Њ А

1. Ако је  $\lambda(x)$  интеграциони фактор, нова једначина је облика  $Pdx + Qdy$ , где је  $P = \lambda(x)(x + y)$  и  $Q = \lambda(x) \tan x$ . Како је

$$P'_y = \lambda, \quad Q'_x = \lambda' \tan x + \lambda \cdot \frac{1}{\cos^2 x},$$

из услова  $P_y = Q'_x$  следи једнакост

$$\lambda' \tan x = \lambda \left( 1 - \frac{1}{\cos^2 x} \right),$$

односно  $\lambda' = -\lambda \frac{\sin x}{\cos x}$ . Ово је диференцијална једначина (по  $\lambda(x)$ ) која раздваја променљиве и њеним решавањем добијамо да је  $\lambda = \cos x$ .

Ако је  $u'_x = (x + y) \cos x$  и  $u'_y = \sin x$ , тада је

$$u = \int \sin x dy + \varphi(x) = y \sin x + \varphi(x),$$

па је  $u'_x = y \cos x + \varphi'$ . Изједначавањем два израза за  $u'_x$  налазимо да је  $\varphi' = x \cos x$ , одакле добијамо

$$\varphi(x) = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x.$$

Према томе,  $u = y \sin x + x \sin x + \cos x$ , а опште решење дате једначине је

$$y \sin x + x \sin x + \cos x = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. Карактеристични полином хомогене једначине је  $\lambda^3 + \lambda$ , партикуларна решења хомогене једначине су  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = \sin x$  и  $y_3 = \cos x$ , а њено опште решење је  $y_h = C_1 + C_2 \sin x + C_3 \cos x$ . За опште решење нехомогене једначине, варирањем константи  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ , добијамо систем по  $C'_1$ ,  $C'_2$  и  $C'_3$ .

$$\begin{aligned} C'_1 + C'_2 \sin x + C'_3 \cos x &= 0 \\ C'_2 \cos x - C'_3 \sin x &= 0 \\ -C'_2 \sin x - C'_3 \cos x &= \frac{1}{\sin x}. \end{aligned}$$

Решавањем овог система добијамо да је

$$C'_1 = \frac{1}{\sin x}, \quad C'_2 = -1, \quad C'_3 = -\frac{\cos x}{\sin x},$$

а затим интеграцијом налазимо да је

$$C_1 = -\ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + D_1, \quad C_2 = -x + D_2, \quad C_3 = -\ln |\sin x| + D_3.$$

Опште решење дате једначине је  $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + C_3(x)y_3$ , односно

$$y = \underbrace{D_1 + D_2 \sin x + D_3 \cos x}_{y_h} + \underbrace{\ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| - x \sin x \cos x \ln |\sin x|}_{y_p}.$$

3. Диференцирањем реалног дела  $u$  по  $x$  и  $y$  налазимо да је

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{2 \cosh 2x (\cosh 2x + \cos 2y) - \sinh 2x (2 \sinh 2x)}{(\cosh 2x + \cos 2y)^2} \\ &= \frac{2 + 2 \cosh 2x \cos 2y}{(\cosh 2x + \cos 2y)^2} \\ &= 2 \frac{1 + \cosh 2x \cos 2y}{(\cosh 2x + \cos 2y)^2}, \\ u'_y &= \frac{2 \sinh 2x \sin 2y}{(\cosh 2x + \cos 2y)^2}. \end{aligned}$$

Из Коши-Римановог услова  $u'_y = -v'_x$  добијамо

$$v = -\sin 2y \int \frac{d(\cosh 2x)}{(\cosh 2x + \cos 2y)^2} = \frac{\sin 2y}{\cosh 2x + \cos 2y} + \varphi(y)$$

одакле следи да је

$$v'_y = \frac{2 \cos 2y \cosh 2x + 2}{(\cosh 2x + \cos 2y)^2} + \varphi'_y.$$

Сада из другог Коши-Римановог услова ( $v'_y = u'_x$ ) следи да је  $\varphi' = 0$ , односно  $\varphi = C$ .

Према томе,  $v = \frac{\sin 2y}{\cosh 2x + \cos 2y} + C$  и

$$f(z) = \frac{\sinh 2x}{\cosh 2x + \cos 2y} + \frac{\sin 2y}{\cosh 2x + \cos 2y} \cdot i + iC = \tanh z + iC.$$

4. Ако је  $y \xrightarrow{L} Y$ , тада (при датим условима)  $y' \xrightarrow{L} sY - C$ ,  $y'' \xrightarrow{L} s^2Y - sC$  и  $y''' \xrightarrow{L} s^3Y - s^2C$ . Како је  $t \sinh t \xrightarrow{L} -\left(\frac{1}{s^2 - 1}\right)' = \frac{2s}{(s^2 - 1)^2}$ , из дате једначине и датих услова имамо једнакост

$$s^3 - s^2C - sY + C = \frac{2s}{(s^2 - 1)^2}$$

из које следи да је

$$Y = \frac{s^2C}{s(s^2 - 1)} - \frac{C}{s(s^2 - 1)} + \frac{2s}{s(s^2 - 1)^3} = \frac{C}{s} + \frac{2}{(s^2 - 1)^3}.$$

Налажењем инверзне Лапласове слике добијамо да је  $y(t) = Cu(t) + 2g(t)$ , где је  $g \xrightarrow{L} \frac{1}{(s^2 - 1)^3}$ .

Наравно, треба одредити функцију  $g$ .

Ако је  $F(s) = \frac{1}{(s^2 - 1)^3}$  и  $G(s) = F(s)e^{st}$ , тада је  $g(t) = \operatorname{res}_{s=1} G(s) + \operatorname{res}_{s=-1} G(s)$ . Како је

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{s=1} G(s) &= \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow 1} \left( \frac{e^{st}}{(s+1)^3} \right)'' = \frac{1}{16} (t^2 - 3t + 3)e^t, \\ \operatorname{res}_{s=-1} G(s) &= \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow -1} \left( \frac{e^{st}}{(s-1)^3} \right)'' = -\frac{1}{16} (t^2 + 3t + 3)e^t, \end{aligned}$$

то је

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{t^2}{8} \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{2} - \frac{3t}{8} \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ &= \frac{1}{8} (t^2 \sinh t - 3t \cosh t + 3 \sinh t). \end{aligned}$$

*Напомена.* Функција  $g$  може да се добије и двоструком применом својства конволуције.

## Пример 8 (2005, јуни)

1. Користећи смену  $\sin y = z$  решити диференцијалну једначину

$$y' \cos y - \cos x \sin^2 y - \sin y = 0.$$

2. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - y' \cot x + y \sin^2 x = 0$$

ако функција  $y_1 = \cos(\cos x)$  представља њено партикуларно решење.

3. Испитати регуларност функције

$$f : z \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{z} - \frac{1}{e^z - 1}, & z \neq 0 \\ a, & z = 0 \end{cases}$$

где је  $a \in \mathbb{C}$ .

4. Применом Лапласове трансформације решити систем једначина

$$x' + x + y = f(t)$$

$$y' - x + y = U(t)$$

ако је  $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ e^{1-t}, & t \geq 1 \end{cases}$  и  $x(0) = y(0) = 0$ .

---

### РЕЗУЛТАТИ

1.  $\frac{2}{\sin y} + \sin x + \cos x = Ce^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}.$

2.  $y = C_1 \cos(\cos x) + C_2 \sin(\cos x).$

3. За  $a \neq 1/2$  функција је регуларна у свим тачкама из  $\mathbb{C}$  осим у тачкама  $z_k = 2k\pi$ , где је  $k \in \mathbb{Z}$ , а за  $a = 1/2$  функција је регуларна у тачки  $z = 0$  и у свим тачкама у којима је регуларна за  $a \neq 1/2$ .

4. Решење система је

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-(t-1)} \sin(t-1)u(t-1) + \frac{e^{-t}}{2}(\sin t + \cos t) - \frac{1}{2}u(t) \\ y(t) &= \frac{1}{2}e^{-t}(\sin t - \cos t) + e^{-(t-1)}(1 - \cos(t-1))u(t-1) + \frac{1}{2}u(t). \end{aligned}$$

---

### УПУТСТВА – МЕЂУРЕЗУЛТАТИ

1. Сменом  $u = \sin y$  добија се Бернулијева једначина.

2. Друго партикуларно решење је облика  $y_2 = uy_1$ , при чему се за  $u$  добија диференцијална једначина другог реда у којој сменом  $v = u'$  може да се снизи ред.

3. Дата функција има прекиде у тачкама  $z = 2k\pi i$ , где је  $k \in \mathbb{Z}$  и  $z \neq 0$ , а за  $a \neq 1/2$  функција има прекид и у тачки  $z = 0$ .

4. Користећи да је  $f \xrightarrow{L} F$  и  $u \xrightarrow{L} U$ , где је  $F(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}$  и  $U(s) = \frac{1}{s}$ , Лапласове слике  $X$  и  $Y$  за функције  $x$  и  $y$  се лако добијају. За налажење инверзне слике за  $X$  и  $Y$  може да се користи својство  $\frac{G(s)}{s} \xrightarrow{L^{-1}} \int_0^t g(x)dx$ , где је  $g \xrightarrow{L} G$ .



## Р Е Ш Е Њ А

1. Сменом  $u(x) = \sin y$  имамо да је  $u' = \cos y \cdot y'$ , а дата једначина је сада Бернулијева једначина

$$u' - u = \cos x \cdot u^2.$$

Новом сменом  $v = u^{-1}$ , при чему је  $v' = -u^{-2}u'$ , ова једначина се своди на линеарну једначину

$$v' + v = -\cos x.$$

Према формули за опште решење линеарне једначине имамо да је

$$v = e^{-x} \left( D - \int e^x \cos x dx \right).$$

Парцијалном интеграцијом лако налазимо да је

$$I = \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \left[ -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \right] = e^x \sin x + e^x \cos x - I,$$

одакле следи да је  $I = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x)$ . Заменом у изразу за  $v$  добијамо

$$v = e^{-x} \left( D - \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) \right) = De^{-x} - \frac{1}{2}(\sin x + \cos x),$$

односно  $2v + \sin x + \cos x = Ce^{-x}$ , где је  $C \in \mathbb{R}$ . Враћањем, најпре променљиве  $u$ , а затим  $y$ , добијамо опште решење

$$\frac{2}{\sin y} + \sin x + \cos x = Ce^{-x}.$$

2. Друго партикуларно решење тражимо у облику  $y_2 = uy_1 = u \cdot \cos(\cos x)$ . Диференцирањем налазимо  $y_2'$  и  $y_2''$ ,

$$y_2' = u' \cos(\cos x) + u(-\sin(\cos x))(-\sin x) = u' \cos(\cos x) + u \sin x \sin(\cos x),$$

$$y_2'' = u'' \cos(\cos x) + 2u' \sin x \sin(\cos x) + u [\cos x \sin(\cos x) + \sin \cos(\cos x)(-\sin x)].$$

Заменом  $y_2$ ,  $y_2'$  и  $y_2''$  добијеним изразима, дата једначина постаје једначина по  $u$ ,

$$u'' \cos(\cos x) + \left[ 2 \sin x \sin(\cos x) - \cos(\cos x) \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \right] u' = 0.$$

Сменом  $v = u'$  снижава се ред ове једначине и добија се једначина која раздваја променљиве,

$$\frac{dv}{v} = \left( \frac{\cos x}{\sin x} - 2 \sin x \cdot \frac{\sin(\cos x)}{\cos(\cos x)} \right) dx.$$

Интеграцијом налазимо да је

$$\ln v = \ln |\sin x| - 2 \ln |\cos(\cos x)| = \ln |\sin x| - \ln(\cos(\cos x))^2 = \ln \frac{|\sin x|}{\cos^2(\cos x)},$$

одакле добијамо једно решење ове једначине,  $v = \frac{\sin x}{\cos^2(\cos x)}$ .

Враћањем променљиве  $u$  и интеграцијом налазимо да је

$$u = \int \frac{\sin x dx}{\cos^2(\cos x)} = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2(\cos x)} = -\tan(\cos x),$$

односно  $y_2 = -\tan(\cos x) \cdot y_1 = -\sin(\cos x)$ . Како су партикуларна решења  $y_1$  и  $y_2$  линеарно независна, опште решење дате једначине је  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ , односно

$$y = C_1 \cos(\cos x) + C_2 \sin(\cos x).$$

**3.** За  $z \neq 2k\pi i$ , где је  $k \in \mathbb{Z}$ , функција је регуларна јер се добија као количник и разлика регуларних функција.

У тачкама  $z_k = 2k\pi i$ ,  $k \neq 0$ , функција нема граничну вредност, па у тим тачкама није ни диференцијабилна.

У тачки  $z = 0$  функција је непрекидна само за  $a = 1/2$  јер је

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1 - z}{z(e^z - 1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{e^z - 1 + ze^z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{2e^z + ze^z} = \frac{1}{2}.$$

Како је

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \cdot \frac{2(e^z - 1) - 2z - z(e^z - 1)}{2z(e^z - 1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2e^z - 2 - e^z + 1 - ze^z}{4z(e^z - 1) + 2z^2e^z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - e^z - ze^z}{4(e^z - 1) + 4ze^z + 4ze^z + 2z^2e^z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-e^z - ze^z}{4e^z + 4e^z + 4ze^z + 4e^z + 4ze^z + 4ze^z + 2z^2e^z} \\ &= -\frac{1}{12}, \end{aligned}$$

то је  $f'(0) = -1/12$ . Функција  $f$  је диференцијабилна и у некој околини тачке  $z = 0$ , што значи да је и регуларна у тачки  $z = 0$ .

Према томе, за  $a \neq 1/2$  дата функција је регуларна у свим тачкама комплексне равни осим у тачкама  $z_k$  за  $k \in \mathbb{Z}$ , а за  $a = 1/2$  регуларна је још и у тачки  $z = 0$ .

**4.** Како је  $f(t) = e^{1-t}u(t-1) = e^{-(t-1)}u(t-1)$ , имамо да је  $f \xrightarrow{L} F$ , где је  $F(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}$ . Ако је  $x \xrightarrow{L} X$ ,  $y \xrightarrow{L} Y$  и  $u \xrightarrow{L} U$ , тада из датог система добијамо систем по  $X$  и  $Y$ ,

$$sX + X + Y = F, \quad sY - X + Y = U,$$

односно

$$(s+1)X + Y = F, \quad -X + (s+1)Y = U.$$

Решавањем овог система добијамо да је

$$\begin{aligned} X &= \frac{e^{-s}}{(s+1)^2 + 1} - \frac{1}{s[(s+1)^2 + 1]}, \\ Y &= \frac{1}{(s+1)^2 + 1} + \frac{1}{s[(s+1)^2 + 1]} + \frac{e^{-s}}{(s+1)[(s+1)^2 + 1]}. \end{aligned}$$

Како важи

$$\frac{e^{-s}}{(s+1)^2 + 1} \xrightarrow{L^{-1}} e^{-t} \sin t, \quad \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \xrightarrow{L^{-1}} e^{-t} \sin t, \quad \frac{1}{s(s^2 + 1)} \xrightarrow{L^{-1}} \int_0^t \sin x dx = 1 - \cos t,$$

$$\frac{1}{(s+1)[(s+1)^2+1]} \xrightarrow{L^{-1}} e^{-t}(1-\cos t), \quad \frac{e^{-s}}{(s+1)[(s+1)^2+1]} \xrightarrow{L^{-1}} e^{-(t-1)}u(t-1)-e^{-(t-1)}\cos(t-1)u(t-1),$$

$$\frac{1}{s[(s+1)^2+1]} \xrightarrow{L^{-1}} \int_0^t e^{-x} \sin x dx = -\frac{\sin x + \cos x}{2} e^{-x} \Big|_0^t = -\frac{e^{-t}}{2}(\sin t + \cos t) + \frac{1}{2},$$

то је

$$x(t) = e^{-(t-1)} \sin(t-1)u(t-1) + \frac{e^{-t}}{2}(\sin t + \cos t) - \frac{1}{2}u(t),$$

$$y(t) = e^{-t} \sin t - \frac{e^{-t}}{2}(\sin t + \cos t) + \frac{1}{2}u(t) + e^{-(t-1)}u(t-1) - e^{-(t-1)}\cos(t-1)u(t-1).$$

## Пример 9 (2005, јуни)

1. Користећи смену  $\sin x = z$  решити диференцијалну једначину

$$(y^2 + 4 \sin x)y' = \cos x.$$

2. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y''' + 4y' = \cot 2x.$$

3. Испитати регуларност функције  $f : z \mapsto \begin{cases} \frac{e^z}{z} - \frac{\sin z}{z^2}, & z \neq 0 \\ a, & z = 0 \end{cases}, a \in \mathbb{C}.$

4. Применом Лапласове трансформације решити систем једначина

$$x' - x - y = u(t), \quad y' + x - y = f(t)$$

са почетним условима  $x(0) = y(0) = 0$ , где је  $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ e^{t-1}, & t \geq 1 \end{cases}$  и где је  $u$  јединична одскачна функција.

---

### РЕЗУЛТАТИ

---

1.  $\sin x = Ce^{4y} - \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{8}y - \frac{1}{32}.$

2. Опште решење је

$$D_1 + D_2 \cos 2x + D_3 \sin 2x + \frac{1}{8} \ln |\sin 2x| - \frac{1}{8} \cos 2x \ln |\tan x| - \frac{1}{8} \cos^2 2x - \frac{1}{8} \sin^2 2x.$$

3. Функција је регуларна у тачкама  $z \neq 0$ , а у тачки  $z = 0$  је регуларна за  $a = 1$ .

4. Тражено решење је

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}e^t(\sin t + \cos t) - \frac{1}{2} + e^{t-1}(1 - \cos(t-1))u(t-1), \\ y(t) &= \frac{1}{2}e^t(\sin t - \cos t) + \frac{1}{2} - \sin(t-1)u(t-1). \end{aligned}$$

## Р Е Ш Е Њ А

1. Ако дату једначину напишемо у облику  $x' \cos x - 4 \sin x - y^2 = 0$ , тада сменом  $\sin x = z$  добијамо линеарну једначину (по  $z(y)$ )

$$z' - 4z = y^2.$$

Према формули за опште решење линеарне једначине имамо да је

$$z = e^{4y} \left( C + \int y^2 e^{-4y} dy \right) = C e^{4y} - e^{4y} \cdot I,$$

где интеграл  $I$  налазимо парцијалном интеграцијом са  $u = y^2$  и  $dv = e^{-4y} dy$ .

Како је

$$\begin{aligned} I &= -\frac{y^2}{4} e^{-4y} + \frac{1}{2} \int y e^{-4y} dy = -\frac{y^2}{4} e^{-4y} + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{4} y e^{-4y} + \frac{1}{4} \int e^{-4y} dy \right) \\ &= -\frac{y^2}{4} e^{-4y} - \frac{1}{8} y e^{-4y} - \frac{1}{32} e^{-4y}, \end{aligned}$$

то је

$$u = C e^{4y} - \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{8} y - \frac{1}{32},$$

а опште решење дате једначине је

$$\sin x = C e^{4y} - \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{8} y - \frac{1}{32}.$$

2. Опште решење  $y_h$  хомогене једначине  $y''' + 4y' = 0$  је

$$y_h = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

јер су  $\lambda = 0$  и  $\lambda = \pm 2i$  нуле карактеристичног полинома  $\lambda^3 + 4\lambda = 0$ .

Опште решење дате једначине добија се варирањем константи  $C_1, C_2, C_3$  у функције које налазимо из система

$$\begin{aligned} C_1' + C_2' \cos 2x + C_3' \sin 2x &= 0 \\ -2C_2' \sin 2x + 2C_3' \cos 2x &= 0 \\ -4C_2' \cos 2x - 4C_3' \sin 2x &= f, \end{aligned}$$

односно система

$$\begin{aligned} C_1' + C_2' \cos 2x + C_3' \sin 2x &= 0 \\ C_2' \sin 2x - C_3' \cos 2x &= 0 \\ C_2' \cos 2x + C_3' \sin 2x &= -f/4, \end{aligned}$$

где је  $f = \cot 2x$ .

Из друге и треће једначине овог система добијамо да је

$$C_2' = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\cos^2 2x}{\sin 2x}, \quad C_3' = -\frac{1}{4} \cos 2x,$$

а онда из прве једначине имамо да је

$$C_1' = \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos^2 2x}{\sin 2x} \cdot \cos 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \sin 2x = \frac{1}{4} \cos 2x \cdot \frac{\cos^2 2x + \sin^2 2x}{\sin 2x} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x}.$$

Из ових једнакости интеграцијом налазимо да је

$$\begin{aligned}C_1(x) &= \frac{1}{8} \int \frac{d(\sin 2x)}{\sin 2x} = \frac{1}{8} \ln |\sin 2x| + D_1, \quad D_1 \in \mathbb{R}, \\C_2(x) &= -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{\sin 2x} + \frac{1}{4} \int \sin 2x dx = -\frac{1}{8} \ln |\tan x| - \frac{1}{8} \cos 2x + D_2, \quad D_2 \in \mathbb{R}, \\C_3(x) &= -\frac{1}{4} \int \cos 2x dx = -\frac{1}{8} \sin 2x + D_3, \quad D_3 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Према томе,

$$\begin{aligned}y &= C_1(x) + C_2(x) \cos 2x + C_3(x) \sin 2x \\&= D_1 + D_2 \cos 2x + D_3 \sin 2x + \frac{1}{8} \ln |\sin 2x| - \frac{1}{8} \cos 2x \ln |\tan x| - \frac{1}{8} \cos^2 2x - \frac{1}{8} \sin^2 2x \\&= y_h + \frac{1}{8} (\ln |\sin 2x| - \cos 2x \ln |\tan x| - 1).\end{aligned}$$

3. Функција је регуларна за  $z \neq 0$ . Како је

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{ze^z - \sin z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z + ze^z - \cos z}{2z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2e^z + ze^z + \sin z}{2} = 1,$$

функција  $f$  је непрекидна у тачки  $z = 0$  за  $a = 1$ . За ту вредност параметра  $a$ , функција је регуларна и у тачки  $z = 0$  јер је

$$\begin{aligned}f'(0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \left( \frac{ze^z - \sin z}{z^2} - 1 \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{ze^z - \sin z - z^2}{z^3} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z + ze^z - \cos z - 2z}{3z^2} \\&= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2e^z + ze^z + \sin z - 2}{6z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{3e^z + ze^z + \cos z}{6} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

За  $a \neq 1$  функција није регуларна у тачки  $z = 0$ .

4. Ако је  $L[f] = F$ ,  $L[x] = X$  и  $L[y] = Y$ , тада је  $F(s) = \frac{e^{-s}}{s-1}$ ,  $L[x'] = sX$  и  $L[y'] = sY$ , па из датог система следи да је

$$sX - X - Y = \frac{1}{s}, \quad sY + X - Y = F,$$

односно

$$(s-1)X - Y = \frac{1}{s}, \quad X + (s-1)Y = F + 1.$$

Из ових једнакости налазимо да је

$$X = \frac{s-1}{s[(s-1)^2+1]} + \frac{e^{-s}}{(s-1)[(s-1)^2+1]}, \quad Y = \frac{e^{-s}}{(s-1)^2+1} - \frac{1}{s[(s-1)^2+1]}.$$

Налажењем инверзних Лапласових трансформација имамо да је

$$\begin{aligned}\frac{s-1}{(s-1)^2+1} &\xrightarrow{L^{-1}} e^t \cos t, \quad \frac{1}{(s-1)^2+1} \xrightarrow{L^{-1}} e^t \sin t, \quad \frac{e^{-s}}{(s-1)^2+1} \xrightarrow{L^{-1}} \sin(t-1)u(t-1), \\ \frac{1}{s(s^2+1)} &\xrightarrow{L^{-1}} \int_0^t \sin u du = -\cos t + 1, \quad \frac{1}{(s-1)[(s-1)^2+1]} \xrightarrow{L^{-1}} e^t(1-\cos t), \\ \frac{e^{-s}}{(s-1)[(s-1)^2+1]} &\xrightarrow{L^{-1}} e^{t-1}(1-\cos(t-1))u(t-1),\end{aligned}$$

$$\frac{s-1}{s[(s-1)^2+1]} \xrightarrow{L^{-1}} \int_0^t e^u \cos u du = \frac{1}{2} e^t (\sin t + \cos t) - \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{s[(s-1)^2+1]} \xrightarrow{L^{-1}} \int_0^t e^u \sin u du = \frac{1}{2} e^t (\sin t - \cos t) + \frac{1}{2}.$$

Према томе,

$$x(t) = \frac{1}{2} e^t (\sin t + \cos t) - \frac{1}{2} + e^{t-1} (1 - \cos(t-1)) u(t-1),$$
$$y(t) = \frac{1}{2} e^t (\sin t - \cos t) + \frac{1}{2} - \sin(t-1) u(t-1).$$

## Пример 10 (2005, јуни)

1. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y' = \frac{(2y + 1)^2}{(x + 2y - 2)^2}.$$

2. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y''' + 4y' = \frac{4}{\cos 2x}.$$

3. Израчунати  $\int_{C+} \frac{\sin \frac{\pi}{2} z}{(z^2 - z)^2} dz$  ако је  $C = \{z : |z| = \frac{\pi}{2}\}$ .

4. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y''(t) - 3y'(t) = 1 + \sin t + \cos t.$$

---

РЕЗУЛТАТИ

---

1.  $e^{2 \arctan \frac{x-3}{2y+1}} = C(2y + 1).$

2.  $C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + \frac{1}{4} \ln \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x} - x \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x \ln |\cos 2x|.$

3.  $I = \pi(\pi - 4)i.$

4.  $y(t) = A + Be^{3t} - \frac{t}{3} + \frac{1}{5}(\cos t - 2 \sin t).$



## Р Е Ш Е Њ А

1. Сменом  $y = y_1 - 1/2$ ,  $x = x_1 + 3$  имамо једначину

$$y'_1 = \left( \frac{2y_1}{x_1 + 2y_1} \right)^2.$$

Како је

$$x'_1 = \left( \frac{x_1 + 2y_1}{2y_1} \right)^2 = \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{x_1}{y_1} + 1 \right)^2,$$

сменом  $z(y_1) = \frac{x_1}{y_1}$  добијамо једначину која раздваја променљиве,

$$\frac{dz}{z^2 + 4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{dy_1}{y_1}.$$

Опште решење дате једначине је

$$e^{2 \arctan \frac{x-3}{2y+1}} = C(2y+1), \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. Опште решење хомогене једначине  $y''' + 4y' = 0$  је

$$y_h = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x.$$

Систем за функције  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$  и  $C_3(x)$  је

$$\begin{aligned} C'_1 + C'_2 \cos 2x + C'_3 \sin 2x &= 0 \\ -C'_2 \sin 2x + C'_3 \cos 2x &= 0 \\ C'_2 \cos 2x + C'_3 \sin 2x &= -\frac{1}{\cos 2x}, \end{aligned}$$

а његова решења су

$$C'_1 = \frac{1}{\cos 2x}, \quad C'_2 = -1, \quad C'_3 = -\tan 2x.$$

Из ових једнакости налазимо да је

$$C_1(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x} + D_1, \quad C_2(x) = -x + D_2, \quad C_3(x) = \frac{1}{2} \ln |\cos 2x| + D_3.$$

Опште решење дате једначине је

$$y(x) = C_1(x) + C_2(x) \cos 2x + C_3(x) \sin 2x,$$

односно

$$y(x) = y_h(x) + \frac{1}{4} \ln \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x} - x \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x \ln |\cos 2x|.$$

3. За функцију  $z \mapsto \frac{\sin \frac{\pi z}{2}}{(z^2 - z)^2}$  тачка  $z = 0$  је пол првог реда јер је

$$\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi z}{2}}{z} \cdot \frac{1}{(z-1)^2} = \frac{\pi}{2},$$

а тачка  $z = 1$  је пол другог реда.

Како је  $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = \frac{\pi}{2}$  и

$$\operatorname{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)^2 f(z)]' = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi z}{2} \cdot z^2 - 2z \sin \frac{\pi z}{2}}{z^4} = -2,$$

то је

$$\int_{C^+} f(z) dz = 2\pi i \left( \frac{\pi}{2} - 2 \right) = \pi(\pi - 4)i.$$

4. Ако је  $y(0) = C_1$  и  $y'(0) = C_2$  и ако је  $L[y] = Y$ , тада применом Лапласове трансформације из дате једначине добијамо једнакост

$$(s^2 Y - sC_1 - C_2) - 3(sY - C_1) = \frac{1}{s} + \frac{s+1}{s^2+1}.$$

Из ове једнакости следи да је

$$Y = \frac{2s^2 + s + 1}{s^2(s-3)(s^2+1)} + \frac{C_1 s + C_2}{s(s-3)}.$$

Растављањем на просте разломке имамо да је

$$Y = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{s-2}{s^2+1},$$

где су  $A$  и  $B$  константе (зависне од  $C_1$  и  $C_2$ ).

Према томе, опште решење дате једначине је

$$y(t) = A + Be^{3t} - \frac{t}{3} + \frac{1}{5}(\cos t - 2 \sin t).$$

## Пример 11 (2005, септембар)

1. Користећи смену  $z = e^y$  решити диференцијалну једначину

$$(1 - 2xe^y)y' = e^y - 1.$$

2. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y^{iv} + y'' = \ln x.$$

3. Дата је функција  $f(z) = \begin{cases} z^2/\bar{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}.$

(а) Испитати да ли у тачки  $z = 0$  важе Коши-Риманови услови.

(б) Израчунати  $\int_{C^+} f(z)dz$  ако је  $C = \{z : |z| = r\}$ ,  $r \neq 0$ .

4. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'''(t) + y'(t) = \sin t$$

ако је  $y(0) = y'(0) = 1$ ,  $y''(0) = 0$ .

---

### РЕЗУЛТАТИ

---

1.  $y - e^y + x(e^y - 1)^2 = C$ .

2. Опште решење је  $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + C_3(x)y_3 + C_4(x)y_4$ , где је

$$C_1 = -\frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{4}x^2 + D_1, \quad C_2 = x \ln x - x + D_2,$$

$$C_3 = -\cos x \cdot \ln x + \text{Ci}(x) + D_3, \quad C_4 = -\sin x \cdot \ln x + \text{Si}(x) + D_4.$$

3. 1) У тачки  $z = 0$  не важе Коши-Риманови услови. 2)  $I = 0$ .

4.  $y(t) = 2u(t) + \sin(t) - \cos(t) - \frac{1}{2}t \sin t$ .

## РЕШЕЊА

1. Сменом  $z = e^y$  дата једначина своди се на линеарну једначину (по  $x$ )

$$x' + \frac{2}{z-1}x = \frac{1}{z(z-1)}.$$

Опште решење ове једначине је

$$x(z) = \frac{C}{(z-1)^2} + \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{\ln z}{(z-1)^2}.$$

Враћањем променљиве  $y$  добијамо опште решење дате једначине

$$y - e^y + x(e^y - 1)^2 = D, \quad D \in \mathbb{R}.$$

2. Пошто је карактеристични полином хомогене једначине једнак  $\lambda^4 + \lambda^2$ , партикуларна решења хомогене једначине су  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = x$ ,  $y_3 = \cos x$  и  $y_4 = \sin x$ , а опште решење је  $y_h = C_1 + C_2x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$ . За опште решење нехомогене једначине, варирањем константи  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  и  $C_4$ , имамо одговарајући систем по  $C'_1$ ,  $C'_2$ ,  $C'_3$  и  $C'_4$  чијим решавањем добијамо

$$C'_1 = -x \ln x, \quad C'_2 = \ln x, \quad C'_3 = \sin x \cdot \ln x, \quad C'_4 = -\cos x \cdot \ln x.$$

Из ових једнакости интеграцијом налазимо да је

$$C_1 = -\frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{4}x^2 + D_1, \quad C_2 = x \ln x - x + D_2,$$

$$C_3 = -\cos x \cdot \ln x + \text{Ci}(x) + D_3, \quad C_4 = -\sin x \cdot \ln x + \text{Si}(x) + D_4.$$

Опште решење дате једначине је  $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + C_3(x)y_3 + C_4(x)y_4$ .

3. 1) Издвајањем реалног и имагинарног дела дате функције добијамо

$$f(z) = \frac{z^2}{\bar{z}} = \frac{(x+iy)^2}{x-iy} = \frac{(x+iy)^3}{x^2+y^2} = u+iv,$$

где је

$$u(x, y) = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \frac{3x^2y - y^3}{x^2 + y^2}.$$

Пошто је  $u'_x(0,0) = 1$ ,  $v'_y(0,0) = 1$  и  $u'_y = v'_x(0,0) = 0$ , у тачки  $z = 0$  нису испуњени Коши-Риманови услови.

2) За  $z \in C$  је  $z = re^{it}$ , па је

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{r^2 e^{2it}}{r e^{-it}} \cdot r e^{it} \cdot i dt = r^2 i \int_0^{2\pi} e^{4it} dt = 0.$$

4. Ако је  $y \xrightarrow{L} Y$ , тада из датих услова добијамо једнакост

$$(s^3 + s)Y = 1 + s + s^2 + \frac{1}{s^2 + 1}$$

из које следи да је

$$Y = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{s}{(s^2 + 1)^2}.$$

Налажењем инверзне Лапласове слике налазимо да је

$$y(t) = 2u(t) + \sin(t) - \cos(t) - \frac{1}{2}t \sin t,$$

где је  $u$  одскочна функција.

## Пример 12 (2005, септембар)

1. Користећи смену  $z = y^2$  решити диференцијалну једначину

$$2xy' = y + \sqrt{y^2 + \frac{x^2}{y^2}}.$$

2. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x^3 - y^3 + y^2z} = \frac{dy}{x^3 - y^3 + x^2z} = \frac{dz}{(x^2 - y^2)z}.$$

3. Одредити све аналитичке функције  $f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$  ако је

$$u(x, y) = e^x[(x^2 - y^2) \cos y + 2(1 - xy) \sin y].$$

4. Применом Лапласове трансформације решити једначину  $y'' + y = f(t)$ , ако је

$$f(t) = \begin{cases} 4, & 0 \leq t < 2 \\ t + 2, & t \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{и } y(0) = y'(0) = 0.$$

---

РЕЗУЛТАТИ

---

1.  $y^2 + \sqrt{y^4 + x^2} = Cx^2$ .
2. Решење је дефинисано првим интегралима  $x - y + z = C_1$  и  $\frac{y^3 - x^3}{z^3} = C_2$ .
3.  $f(z) = z^2 e^z + (C - 2e^z)i$ .
4.  $y(t) = 4(1 - \cos t) + (t - 2)u(t - 2) - \sin(t - 2)u(t - 2)$ .

## Р Е Ш Е Њ А

1. Сменом  $z = y^2$  имамо да је  $z' = 2yy'$ , а дата једначина постаје хомогена једначина

$$xz' = z + \sqrt{z^2 + x^2}.$$

Новом сменом  $z/x = u$  добијамо једначину  $xu' = \sqrt{u^2 + 1}$  која раздваја променљиве. Решење ове једначине је

$$u + \sqrt{u^2 + 1} = Cx.$$

Враћањем променљиве  $x$  имамо да је

$$z + \sqrt{z^2 + x^2} = Cx^2,$$

а враћањем променљиве  $y$  добијамо да је опште решење полазне једначине дато са

$$y^2 + \sqrt{y^4 + x^2} = Cx^2,$$

односно са  $C^2x^2 - 2Cy^2 = 1$ .

2. Из једнакости  $dx - dy + dz = 0$  добијамо један први интеграл  $\varphi(x, y, z) = C_1$ , где је  $\varphi(x, y, z) = x - y + z$ . Други први интеграл налазимо из једнакости

$$\frac{y^2 dy - x^2 dx}{(x^3 - y^3)(y^2 - x^2)} = \frac{dz}{(x^2 - y^2)z},$$

односно једнакости  $\frac{1}{3} \frac{d(y^3 - x^3)}{y^3 - x^3} = \frac{dz}{z}$ . Из ове једнакости интеграцијом добијамо да је  $y^3 - x^3 = Cz^3$ , одакле имамо први интеграл  $\psi(x, y, z) = C_2$ , где је  $\psi(x, y, z) = \frac{y^3 - x^3}{z^3}$ . Како је

$$\begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y \\ \psi'_x & \psi'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \frac{3y^2}{z^3} & -\frac{3x^2}{z^3} \end{vmatrix} = -\frac{3}{z^3}(x^2 - y^2) \neq 0$$

за  $x^2 \neq y^2$ , наведени први интеграл су независни и дефинишу решење датог система.

3. Диференцирањем (по  $x$  и по  $y$ ) функције  $u$  добијамо

$$u'_x = e^x((x^2 - y^2) \cos y + (2 - 2xy) \sin y + 2x \cos y - 2y \sin y),$$

$$u'_y = e^x(-2y \cos y(x^2 - y^2) \sin y - 2x \sin y + (2 - 2xy) \cos y).$$

На основу Коши-Риманове једнакости  $v'_y = u'_x$  имамо да је

$$v = \int v'_y dy = \int u'_x dy = e^x((x^2 - y^2) \sin y + 2(xy - 1) \cos y) + \varphi(x).$$

Из ове једнакости израчунамо  $v_x$ , а затим из друге Коши-Риманове једнакости ( $u'_y = -v'_x$ ) закључујемо да је  $\varphi'(x) = 0$ , односно да је  $\varphi(x) = C$ .

Према томе,  $v(x, y) = e^x((x^2 - y^2) \sin y + 2(xy - 1) \cos y) + C$ , а

$$f(z) = u + iv = z^2 e^z + (C - 2e^z)i.$$

4. Уочимо најпре да је

$$\begin{aligned} h(t) &= 4(u(t) - u(t-2)) + (t+2)u(t-2) \\ &= 4u(t) + (t-2)u(t-2) \\ &\xrightarrow{L} \frac{4}{s} + \frac{1}{s^2} e^{-2s}. \end{aligned}$$

Ако је  $y \xrightarrow{L} Y$ , тада из дате једначине и датих услова добијамо једнакост

$$s^2 Y + Y = \frac{4}{s} + \frac{1}{s^2} e^{-2s}$$

из које следи да је

$$Y(s) = \frac{4}{s(s^2 + 1)} + \frac{1}{s^2(s^2 + 1)} e^{-2s}.$$

Како је

$$\frac{4}{s(s^2 + 1)} \xrightarrow{L^{-1}} 4 \int_0^t \sin x dx = -4 \cos x \Big|_0^t = 4(1 - \cos t),$$

$$\frac{1}{s^2(s^2 + 1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 1} \xrightarrow{L^{-1}} t - \sin t,$$

$$\frac{e^{-2s}}{s^2(s^2 + 1)} \xrightarrow{L^{-1}} (t - 2 - \sin(t - 2))u(t - 2),$$

то је

$$y(t) = 4(1 - \cos t) + (t - 2)u(t - 2) - \sin(t - 2)u(t - 2).$$

### Пример 13 (2007, септембар)

1. Решити диференцијалну једначину

$$x \cos^2 y dx + (x^2 + 1) dy = 0.$$

2. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$x' = -x - 2z$$

$$y' = -x + y - 3z$$

$$z' = x + z.$$

3. Одредити све аналитичке функције  $f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$  за које је

$$u(x, y) = e^{2x}(x \cos 2y - y \sin 2y).$$

4. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y''' - y'' + y' - y = e^{-t}$$

са почетним условима  $y(0) = y'(0) = 1$  и  $y''(0) = 0$ .

#### РЕЗУЛТАТИ

1. Опште решење је дато једнакошћу  $2 \tan y + \ln(1 + x^2) = C$ , а сингуларна решења су облика  $y = \pi/2 + k\pi$ , где је  $k \in \mathbb{Z}$ .

2. Опште решење је

$$x = -2C_2(\sin t + \cos t) + 2C_3(\cos t - \sin t),$$

$$y = C_1 e^t + C_2(-3 \sin t + \cos t) + C_3(\sin t + 3 \cos t),$$

$$z = 2C_2 \cos t + 2C_3 \sin t,$$

где су  $C_1, C_2, C_3$  произвољне реалне константе.

3.  $f(z) = ze^{2z} + Ci$ .

4.  $y(t) = \frac{3}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t.$

#### УПУТСТВА – МЕЂУРЕЗУЛТАТИ

1. Дељењем са  $(x^2 + 1) \cos^2 y$  добија се једначина која раздваја променљиве.

2. Нуле карактеристичног полинома су 1,  $i$  и  $-i$ . Ако је  $X_1$  партикуларно решење које одговара вредности  $\lambda = 1$ , а  $X_k$  комплексно решење које одговара вредности  $\lambda = i$ , тада су  $X_1$ ,  $Re(X_k)$  и  $Im(X_k)$  независна партикуларна решења.

3. За налажење функције  $v$  користити Коши-Риманове услове. Из услова

$$v'_y = u'_x = e^{2x}((2x + 1) \cos 2y - 2y \sin 2y)$$

интеграцијом по  $y$  добија се функција  $v$  у којој фигурише константа која зависи од  $x$ .

4. Најпре одредити Лапласове слике извода функције  $y$  преко Лапласове слике саме функције  $y$ . Ако је  $Y = L[y]$ , тада је

$$L[y'] = sY - 1, \quad L[y''] = s^2Y - s - 1, \quad L[y'''] = s^3Y - s^2 - s.$$



## Р Е Ш Е Њ А

1. Ако је  $\cos y \neq 0$ , дата једначина је еквивалентна једначини

$$\frac{xdx}{x^2+1} + \frac{dy}{\cos^2 y} = 0$$

из које следи једнакост

$$\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \tan y + C = 0, \quad C \in \mathbb{R}$$

која представља опште решење дате једначине. Ову једнакост можемо да запишемо и у облику  $\ln(x^2+1) = -2 \tan y + C$ , односно  $x^2+1 = D \cdot e^{-2 \tan y}$ , где је  $D > 0$ .

За  $\cos y = 0$  добијамо решења  $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , где је  $k \in \mathbb{Z}$ .

Друго решење. За  $\cos y \neq 0$ , дата једначина је и Бернулијева по  $x$ ,

$$x' + \frac{1}{\cos^2 y} \cdot x = -\frac{1}{\cos^2 y} \cdot x^{-1}.$$

Сменом  $z = x^2$  ова једначина се своди на линеарну једначину

$$z' + \frac{2}{\cos^2 y} \cdot z = -\frac{2}{\cos^2 y},$$

чијим решавањем и враћањем променљиве  $x$  добијамо исто опште решење.

2. Ако је  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  (матрица датог система), тада је

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -2 \\ -1 & 1-\lambda & -3 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(1-\lambda)^2(1-\lambda) = (1-\lambda)(1+\lambda^2).$$

За  $\lambda = 1$  из система

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

добијамо да је  $a = c = 0$  и  $b \in \mathbb{R}$ . То значи да је

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$$

једно решење система (за  $b = 1$ ).

За  $\lambda = i$  из система

$$\begin{pmatrix} -1-i & 0 & -2 \\ -1 & 1-i & -3 \\ 1 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

следи да је  $(1+3i)c = 2b$  и  $a + (1-i)c = 0$ . Узимајући да је  $c = 2$  имамо да је  $a = 2i - 2$  и  $b = 1 + 3i$ , па је комплексно решење система дато са

$$X_k = \begin{pmatrix} 2i-2 \\ 1+3i \\ 2 \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 2i-2 \\ 1+3i \\ 2 \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} -2 \sin t - 2 \cos t \\ \cos t - 3 \sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cos t - 2 \sin t \\ 3 \cos t + \sin t \\ 2 \sin t \end{pmatrix} i.$$

Ако је  $X_2 = \operatorname{Re}(X_{kom})$  и  $X_3 = \operatorname{Im}(X_{kom})$ , онда су  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  независна партикуларна решења, па је опште решење дато са

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0 & -2 \sin t - 2 \cos t & 2 \cos t - 2 \sin t \\ e^t & -3 \sin t + \cos t & 3 \cos t + \sin t \\ 0 & 2 \cos t & 2 \sin t \end{pmatrix}$$

Према томе, опште решење је

$$\begin{aligned} x &= -2C_2(\sin t + \cos t) + 2C_3(\cos t - \sin t), \\ y &= C_1 e^t + C_2(-3 \sin t + \cos t) + C_3(\sin t + 3 \cos t), \\ z &= 2C_2 \cos t + 2C_3 \sin t, \end{aligned}$$

где су  $C_1, C_2, C_3$  произвољне реалне константе.

**3.** Налажењем парцијалних извода функције  $u$  добијамо да је

$$u'_x = ((2x+1) \cos 2y - 2y \sin 2y)e^{2x}, \quad u'_y = ((-2x-1) \sin 2y - 2y \cos 2y)e^{2x}.$$

Како је  $v_y = u'_x$  (Коши-Риманова једнакост), то је

$$v(x, y) = \int v'_y dy + \varphi(x) = e^{2x}(2x+1) \int \cos 2y dy - 2e^{2x} \int y \sin 2y dy + \varphi(x).$$

Парцијалном интеграцијом добијамо да је

$$\int y \sin 2y dy = -\frac{1}{2}y \cos 2y + \frac{1}{4} \sin 2y + C,$$

па је

$$v = \frac{1}{2}e^{2x}(2x+1) \sin 2y + e^{2x}y \cos 2y - \frac{1}{2}e^{2x} \sin 2y + \varphi(x) = e^{2x}x \sin 2y + e^{2x}y \cos 2y + \varphi(x),$$

одакле налазимо да је

$$v'_x = e^{2x}(2x+1) \sin 2y + 2e^{2x}y \cos 2y + \varphi'(x).$$

Из једнакости  $u'_y = -v'_x$  (друга Коши-Риманова једнакост) следи да је  $\varphi'(x) = 0$ , односно  $\varphi(x) = C \in \mathbb{R}$ .

Према томе,  $v(x, y) = xe^{2x} \sin 2y + ye^{2x} \cos 2y + C$ , а заменом  $u$  и  $v$  у  $f = u + iv$  добијамо да је

$$f(z) = e^{2x}((x+iy) \cos 2y - (y-ix) \sin 2y) + Ci = ze^{2x}(\cos 2y + i \sin 2y) + Ci = ze^{2z} + Ci.$$

**4.** Ако је  $Y = L[y]$ , тада је

$$L[y'] = sY - 1, \quad L[y''] = s^2Y - s - 1, \quad L[y'''] = s^3Y - s^2 - s,$$

па из дате једначине следи да је

$$(s^3 - s^2 + s - 1)Y = s^2 + \frac{1}{s+1}.$$

Из ове једнакости имамо да је

$$\begin{aligned} Y &= \frac{s^2}{(s-1)(s^2+1)} + \frac{1}{(s+1)(s-1)(s^2+1)} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s-1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+1}. \end{aligned}$$

Налажењем инверзне Лапласове слике добијамо тражено решење,

$$y(t) = \frac{3}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t.$$

---

#### КОМЕНТАРИ

---

1. Дата једначина може да се сведе и на Бернулијеву једначину по  $x$ .
2. При одређивању сопствених вектора матрице  $A$  за сопствене вредности  $\lambda = 1$  и  $\lambda = i$  имамо једнопараметарска решења одговарајућих система.
3. За  $z = x$  имамо да је  $f(x) = u(x, 0) + iv(x, 0) = xe^{2x} + Ci$ . Ова функција се може аналитички продужити на  $\mathbb{C}$ , што значи да је  $f(z) = ze^{2z} + Ci$ .
4. Израз за  $Y$  може да се запише и као једна рационална функција,

$$Y = \frac{s^3 + s^2 + 1}{(s-1)(s+1)(s^2+1)}$$

која се раставља на просте разломке.

## Пример 14 (2007, септембар)

1. За диференцијалну једначину

$$(2x \sin x - y \cot x)dx + (2y \sin x + 1)dy = 0$$

одредити интеграциони фактор облика  $\lambda(x)$ , а затим решити једначину.

2. Одредити опште решење једначине

$$y''' + y'' + 4y' + 4y = 100xe^x + 20 \cos 2x.$$

3. Израчунати  $\int_{C^+} \frac{e^{iz}}{(z^3 + z)^2} dz$ , где је  $C = \{z : |z + i| = 3/2\}$ .

4. Применом Лапласове трансформације решити систем

$$x' - 5x + 4y = 10 \cos t, \quad y' - 3y + 2x = 10 \sin t$$

уз почетне услове  $x(0) = y(0) = 0$ .

---

### У П У Т С Т В А – М Е Ђ У Р Е З У Л Т А Т И

---

1. Интеграциони фактор је  $\lambda = \frac{1}{\sin x}$ , а опште решење је  $x^2 + y^2 + \frac{y}{\sin x} = C$ .

2. Решење хомогене једначине је

$$y_h = C_1 e^{-3x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x,$$

а партикуларно решење је

$$y_p = (10x - 9)e^x + x(\sin 2x - 2 \cos 2x).$$

3. Области коју затвара контура  $C$  припадају сингуларне тачке  $z = 0$  и  $z = -i$ , па је

$$\int_{C^+} f(z) dz = 2\pi i (\operatorname{res}_{z=0} f(z) + \operatorname{res}_{z=-i} f(z)) = 2\pi i (i + -2ei) = 2(2e - 1)\pi.$$

4. Лапласове слике решења су

$$X(s) = \frac{5}{s-1} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{s-7} - \frac{29}{5} \cdot \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{s^2+1}, \quad Y(s) = \frac{5}{s-1} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{s-7} - \frac{13}{5} \cdot \frac{s}{s^2+1} - \frac{11}{5} \cdot \frac{1}{s^2+1},$$

а решења су

$$x(t) = 5e^t + \frac{4}{5}e^{7t} - \frac{29}{5} \cos t - \frac{3}{5} \sin t, \quad y(t) = 5e^t - \frac{2}{5}e^{7t} - \frac{23}{5} \cos t - \frac{11}{5} \sin t.$$